KS3 SF1634 UTIG. SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) Systemmatrisen har egenvärden

$\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$.

Till $\lambda_1 = -1$ hör egenvektor K_1 s.a.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} K_1 = 0, \text{ ta t.ex } K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som ger lösning $X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$

Till $\lambda_2 = -3$ hör egenvektor K_2 s.a.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K_2 = 0, \text{ ta t.ex } K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

som ger lösning $X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Så allmän lösning är

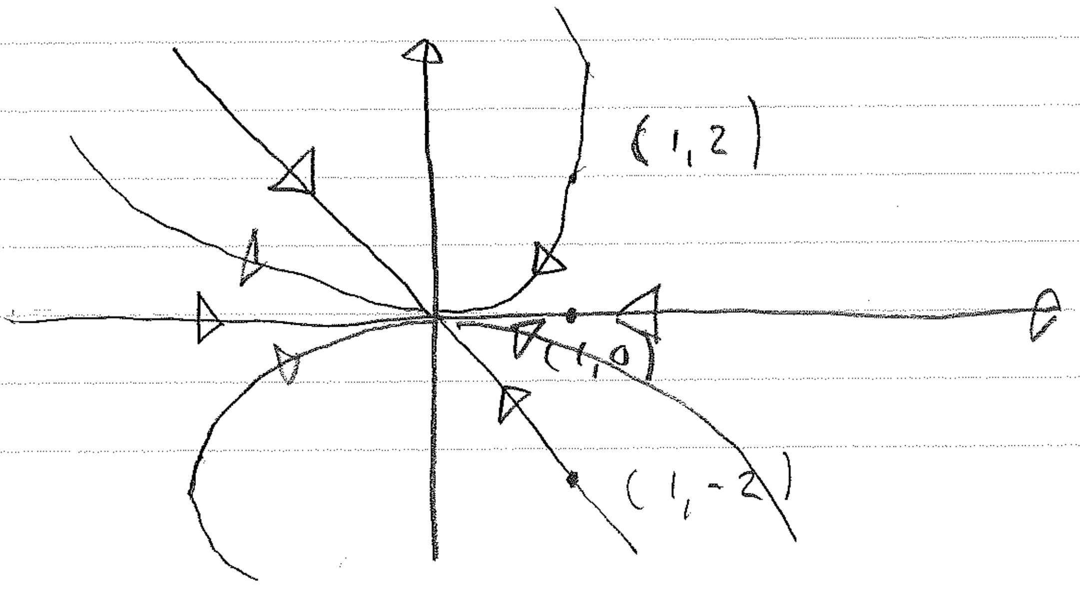
SVAR: $X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$

b) $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$

Så sökt lösning är

SVAR: $X(t) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$

c)



(2.) Stationära punkter (x,y) ges av

$$\begin{cases} 1+xy=0 & (1) \\ x+y=0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \iff y=-x$, insatt i (1) fås

$1-x^2=0 \iff x=\pm 1.$

Alltså två stationära lösningar

$(x,y)=(1,-1)$ och $(x,y)=(-1,1)$.

Stabilitet avgörs med hjälp av

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(1+xy) & \frac{\partial}{\partial y}(1+xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+y) & \frac{\partial}{\partial y}(x+y) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- I $(1,-1)$ gäller $J(1,-1)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

som har egenvärden λ s.a. $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\iff (\lambda+1)(\lambda-1)-1=0 \iff \lambda^2-2=0 \iff \lambda=\pm\sqrt{2}$

alltså är $(1,-1)$ av <u>sadeltyp</u> och <u>instabil</u>

- I $(-1,1)$ fås $J(-1,1)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ som har

egenvärden λ s.a. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \iff (\lambda-1)^2+1=0$

$\iff \lambda=1\pm i$, så $(1,-1)$ är en <u>instabil</u> <u>spiral</u>

(3.) $y'(t) - 2y(t) = \delta(t-2), \quad y(0) = 1$

Laplace transformering ger

(med $Y = Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$)

$$sY - 1 - 2Y = e^{-2s}$$

$$(s-2)Y = 1 + e^{-2s}$$

$$Y = \frac{1}{s-2} + e^{-2s}\frac{1}{(s-2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t)\Big|_{t \to t-2} H(t-2)$$

$$= e^{2t} + e^{2t}\Big|_{t \to t-2} H(t-2)$$

$$= e^{2t} + e^{2(t-2)}H(t-2)$$

SVAR: $y(t) = \begin{cases} e^{2t}, & 0 \le t < 2 \\ e^{2t} + e^{2(t-2)}, & t \geq 2 \end{cases}$

SVAR UPPGIFT 2: Det finns två stationära lösningar/punkter.

- $(x,y) = (1,-1)$ är en sadelpunkt och alltså instabil
- $(x,y) = (-1,1)$ är en instabil spiral