Modell KS3 SF1634 VT16

SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Vi löser först det homogena systemet

$$\bar{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \bar{X}$$

Egenvärden till systemmatrisen fås genom

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda-2)-6=0$$

$$\iff \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \iff \lambda = \lambda_1 = -1 \lor \lambda = \lambda_2 = 4$$

Vi beräknar motsvarande egenvektorer och lösningar.

$\lambda_1 = -1$ svarar mot egenvektor K_1 sådan att

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} K_1 = \bar{0}, \quad \text{ta } K_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

som ger lösning $\bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

$\lambda_2 = 4$ svarar mot egenvektor K_2 sådan att

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} K_2 = \bar{0}, \quad \text{ta } K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som ger lösning $\bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$

Allmän lösning till det homogena systemet är alltså

$$\bar{X}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

1. forts.

En partikulärlösning till $\bar{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \bar{X} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestäms genom s.k. variation av parametrar.

Ansätt $\bar{X}_p = \Phi\, U$, där

$$\Phi = \left(\bar{X}_1 \,\vdots\, \bar{X}_2 \right) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{4t} \\ -2e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}$$

och $U = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ skall bestämmas.

$$U' = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ 2e^{-t} & 3e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ 2e^{-t} & 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ 2e^{-4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix}$$

så

$$U' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ 2e^{-4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} e^{t} \\ -\frac{1}{2} e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_p = \Phi\, U = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{4t} \\ -2e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix} \left(\frac{2}{5}\right) \begin{pmatrix} e^{t} \\ -\frac{1}{2} e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{2} \\ -2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

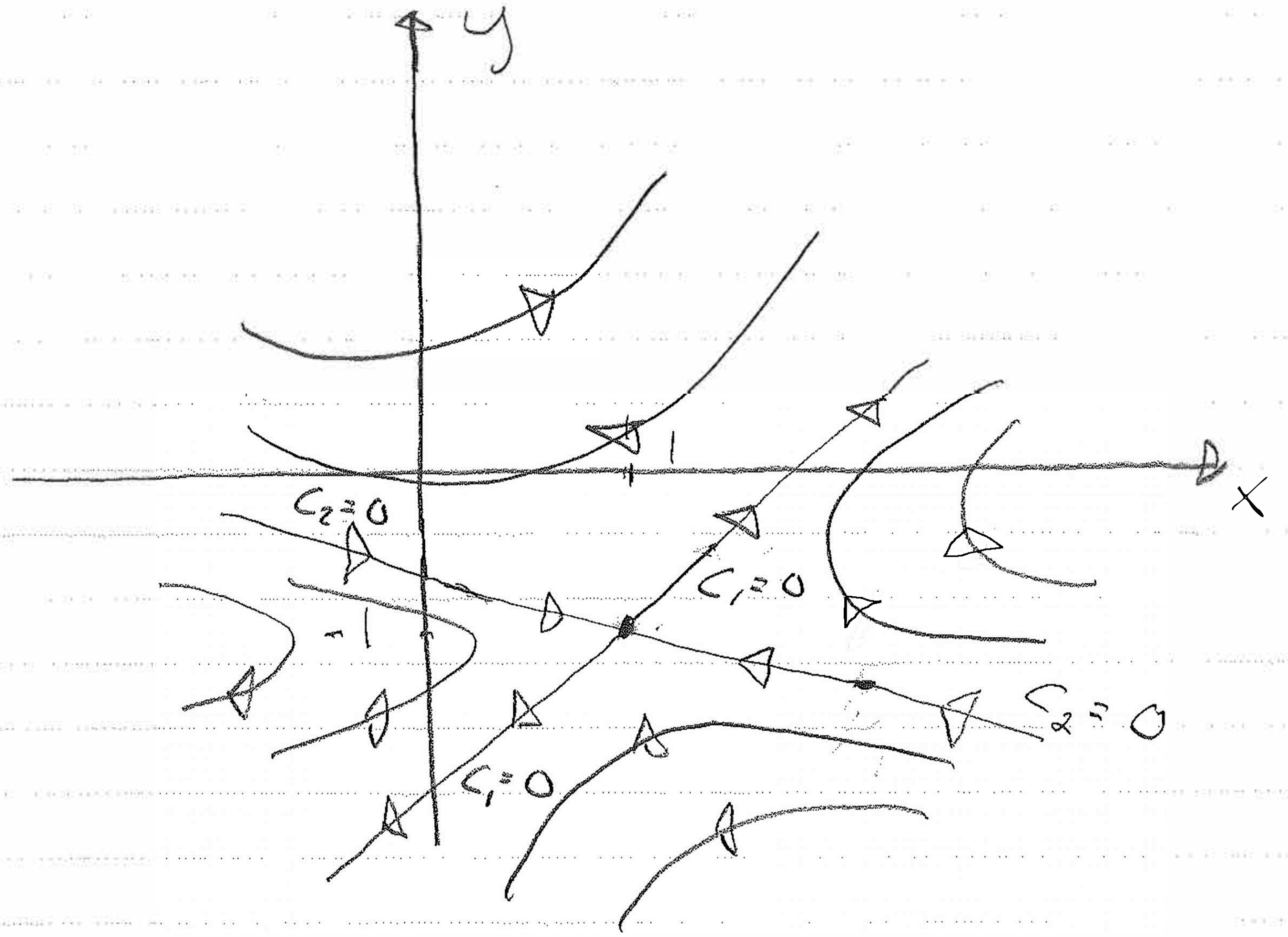
1. forts. 2 Allmän lösning ges av

$$\overline{X}(t) = \overline{X}_h + \overline{X}_p = c_1\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$\overline{X}_p$ är en stationär lösning ($c_1 = c_2 = 0$)

Linjäriseringen kring $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ har lösning $\overline{X}_h$

Detta ger följande fasporträtt



(2.) $\begin{cases} x' = e^y(x-y) \\ y' = x^2 - y \end{cases}$ (1)

Stationära lösningar ges av

$$\begin{cases} e^y(x-y) = 0 & (1) \\ x^2 - y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \overset{e^y \neq 0}{\Longleftrightarrow} x = y$$

$$\underset{(2)}{\overset{}{x = y \;\&}} \Longleftrightarrow x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x-1) = 0$$

så $(x,y) = (0,0)$ och $(x,y) = (1,1)$

är de stationära lösningarna. Med

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(e^y(x-y)) & \frac{\partial}{\partial y}(e^y(x-y)) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y & (x-y-1)e^y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

$J(a,b)$ matris för linjäriserat system kring stationär punkt (a,b).

Kring $(x,y) = (0,0)$ fås

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ som har

egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow (0,0)$ sadelpunkt i linjäriserat system

$\Rightarrow (0,0)$ sadelpunkt i (1),

dvs. instabil stationär lösning

(2. forts.)

Kring $(x,y) = (1,1)$ fås

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} e & -e \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$ Egenvärden ges av

$$\begin{vmatrix} e-\lambda & -e \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)(\lambda-e)+2e = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2 + (1-e)\lambda + e = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = \underbrace{\left(\frac{e-1}{2}\right)}_{>0} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{e-1}{2}\right)^2 - e}_{<0}}$$

Komplext egenvärde med positiv realdel

$\Rightarrow (0,0)$ instabil spiral i linjärisering

$\Rightarrow (1,1)$ instabil spiral i (1)

Svar: Systemet (1) har två stationära lösningar.

(0,0) är en sadelpunkt och därmed instabil

(1,1) är en instabil spiral

(3.) $\begin{cases} y'(t) - 2y(t) + 2\underbrace{\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau}_{(y * \sin)(t)} = \sin t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Laplace transformering ger

$$sY - 0 - 2Y + 2Y \cdot \mathcal{L}\{\sin(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$(s-2)Y + 2Y\frac{1}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2}$$

$$(1+s^2)(s-2)Y + 2Y = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$((1+s^2)(s-2) + 2)Y = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(s^3 - 2s^2 + s \cancel{-2} \cancel{+2})Y = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$s(s^2 - 2s + 1)Y = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$Y = \frac{1}{s(s-1)^2}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$= \frac{A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs}{s(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad A = 1, \quad B = -1, \quad C = 1$$

så $Y = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$

$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}$ enl BETA $y(t) = 1 - e^t + te^t$

(L18) (L21) (L22)

Alternativt kan

$$Y = \frac{1}{s(s-1)^2}$$

inverstransformeras med BETA (L33)

SVAR: $y(t) = 1 - e^t + te^t$