KTH Matematik, Bengt Lindberg

Tentamen del 1
SF1516, 2016-03-23, 8.00-11.00,
Numeriska metoder och grundläggande programmering

Namn: ....

Personnummer:... **Program och årskurs:** ....

Bonuspoäng. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT15 här:

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper.

1. Ekvationen $x^3 = 2x+5$ har en rot mellan 2 och 3. En iteration med Newtons metod och startgissning $x_0 = 2$ ger x_1 lika med: (2p)

☐ 1.7	☐ 1.9	☐ 2.1	☐ 2.5
☐ 1.8	☐ 2.0	☐ 2.2	☐ 3

2. Man vill uppskatta integralen

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ dx$$

med trapetsmetoden och intervallet delas i 2 lika stora delar. Vad blir värdet? Vi vet att $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (2p)

☐ $\frac{\pi}{4}$	☐ $\frac{\pi}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	☐ $\frac{\pi}{4}(2+\frac{\sqrt{2}}{2})$	☐ $\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})$
☐ $\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})$	☐ $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$	☐ $\frac{\pi}{2}$	☐ $\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{2})$

3. Givet funktionen $f(x, y) = 4x + xy$ där $x = 2 \pm 0.04$ och $y = 3 \pm 0.05$. Hur stor är osäkerheten i f? (2p)

☐ 0.01	☐ 0.03	☐ 0.1	☐ 0.3
☐ 0.02	☐ 0.04	☐ 0.2	☐ 0.4

4. Anpassa, i minsta kvadratmetodens mening, en rät linje till nedanstående uppsättning punkter(x,y). Vad blir linjens y-värde då x=0.5?

(1p) a. Punkterna (0,5) och (1,4).

☐ 4 ☐ $4+\frac{1}{4}$ ☐ $4+\frac{1}{3}$ ☐ $4+\frac{1}{2}$

☐ $4+\frac{2}{3}$ ☐ $4+\frac{3}{4}$ ☐ 5 ☐ $5+\frac{1}{4}$

(2p) b. Punkterna i uppgift a och dessutom punkten (-1,0).

☐ 4 ☐ $4+\frac{1}{4}$ ☐ $4+\frac{1}{3}$ ☐ $4+\frac{1}{2}$

☐ $4+\frac{2}{3}$ ☐ $4+\frac{3}{4}$ ☐ 5 ☐ $5+\frac{1}{4}$

(2p) **5.** Interpolera ett polynom av lämpligt gradtal genom punkterna (0,5), (1,4) och (-1,0). Punkterna anger (x-värde, y-värde). Vad blir interpolationspolynomets y-värde då $x = 0,5$?

☐ 4 ☐ $4+\frac{1}{4}$ ☐ $4+\frac{1}{3}$ ☐ $4+\frac{1}{2}$

☐ $4+\frac{2}{3}$ ☐ $4+\frac{3}{4}$ ☐ 5 ☐ $5+\frac{1}{4}$

(2p) **6.** Vad beräknas (approximativt) och skrivs ut av nedanstående program

```
x=2; d=x; dold=d;
while abs(d)>1.E-10,
      d=(x^3-18)/(3*x^2);
      x=x-d; %abs(d/dold^2)
      dold=d;
end
x
```

☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt[3]{2}$ ☐ $\sqrt[4]{2}$

☐ $\sqrt{6}$ ☐ $\sqrt[3]{6}$ ☐ $\sqrt[4]{6}$

☐ $\sqrt{18}$ ☐ $\sqrt[3]{18}$ ☐ $\sqrt[4]{18}$

☐ $\sqrt{36}$ ☐ $\sqrt[3]{36}$ ☐ $\sqrt[4]{36}$

7. Differentialekvationsproblemet

$$(1 + (\frac{d^2z}{dt^2})^2)\frac{d^3z}{dt^3} = 100\cos(t)z,$$

skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

(2p) a. Då blir n.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(1p) b.Om Rungekuttas metod av ordning 4 används för att lösa differentialekvationssystemet som erhålls i a. så behövs k st startvärden där k är

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

8. Integralen

$$\int_0^2 \sqrt{0.5 + 2e^{-x} \sin 2x^2} dx$$

har beräknats med trapetsregeln med steglängderna 0.2 och 0.1. Resultatet blev $T(0.2) = 1.6426$, $T(0.1) = 1.6418$. Vilken steglängd h (ungefär) bör användas i trapetsregeln om vi vill ha ett fel som är mindre än 8×10^{-8} och

(2p) minsta möjliga arbete.

☐ 10^{-2} ☐ 10^{-3} ☐ 10^{-4} ☐ 10^{-5} ☐ 10^{-6} ☐ 10^{-7} ☐ 10^{-8}

9. Ett icke-linjärt ekvationssystem ges av

$$x_1^3 - 2x_2x_1 = 0.1, x_1 + x_1x_2^3 = 17$$

i den ordning de står.

(1p) a. Då $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$ blir Jakobianens (2,2)-element lika med

☐ -4 ☐ 5 ☐ 0.9 ☐ 24 ☐ 28 ☐ 36

b. Med startvärdena $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$ blir maximumnormen av högerledet

(1p) i det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen med Newtons metod lika med

☐ 17 ☐ 0 ☐ 0.1 ☐ 1 ☐ 1.1 ☐ 2

KTH Matematik, Bengt Lindberg

Tentamen del 2
SF1516, 2016-03-23, 8.00-11.00,
Numeriska metoder och grundläggande programmering

P1. Tredjegradskurvan $y(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x-5)$ och ellipsen med halvaxlarna 7 respektive 2 och som beskrivs av

$$\left(\frac{x-3}{7}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1$$

skär varandra på några ställen. Ellipsen är uppritad på sista sidan!

(4p) **a.** Hur många skärningspunkter är det? Bladet med den uppritade ellipsen kan du använda i dina motiveringar.

(4p) **b.** Ställ upp det icke-linjära ekvationssystem som skall lösas då man bestämmer en skärningspunkt med Newtons metod för system.

(7p) **c.** Skriv ett Matlabprogram som bestämmer den högraste skärningspunkten med minst 4 decimalers noggrannhet. Om du inte gjort a. får du hugga till med någon startgissning.

P2. Givet differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0, \qquad y(0) = 0.1, \ \frac{dy}{dx}(0) = A$$

(3p) **a.** Skriv om problemet så du kan använda någon standardrutin i Matlab för att lösa det.

(5p) **b.** Skriv ett Matlabprogram som löser det omskrivna problemet för $\alpha = 1, A = 0.2$ för x på intervallet 0 till 10. Använd gärna Matlabrutinen ode45. De aktuella parametrarna till ode45 är viktiga att få med. Lösningen $y(x)$ skall därefter ritas upp.

(4p) **c.** Utöka programmet i b. så lösningarna för $\alpha = 1$ och $A = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ ritas i samma figur. Rita därefter i en ny figur $y(10)$ som funktion av A.

(3p) **d.** Modifiera slutligen programmet så lösningarna för $\alpha = 0.5, 1, 1.2, 1.5, 1.8, 2.0$ och $A = 0.2$ ritas i en ny figur.

(12p) **P3.** Vi vill bestämma det tredjegradspolynom $p(x)$ som interpolerar punkterna

x:	0	0.25	0.75	1
y:	a	-1	-1.5	2

där a är en parameter. Bestäm a och polynomets koefficienter så att följande villkor också är uppfyllt:

$$\int_0^1 p(x)\, dx = 0.5$$

Skriv upp det ekvationssystem vars lösning ger a och polynomets koefficienter. Ange koefficientmatrisen, högerledet och vektorn av obekanta.

Ledning: Polynomet $p(x)$ kan integreras exakt analytiskt term för term.

(8p) **P4.** Är någon eller några av nedanstående formler bra för att skatta $y'(x)$? Motiveringarna är viktiga för poängen.

a.

$$\frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h}$$

b.

$$\frac{-2y(x-h) - 3y(x) + 6y(x+h) - y(x+2h)}{6h}$$

c.

$$\frac{-y(x-h) + 3y(x) + 3y(x+h) - y(x+2h)}{3h}$$