SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-10-24

DEL A

1. Den 1:a januari 2006 låstes 10 kg av ett visst radioaktivt ämne in i en källare. Ämnet sönderfaller i en takt som är direkt proportionell mot hur mycket som finns kvar av ämnet. Halveringstiden är 50 år. Hur mycket finns kvar av ämnet den 1:a januari 2016?

   Lösning. Om $y(t)$ beskriver mängden av ämnet vid tiden t år, där $t = 0$ motsvarar 1 januari 2006, så måste $y'(t) = ky(t)$ för någon konstant k och följaktligen $y(t) = Ce^{kt}$ där C är ytterligare en konstant.

   Eftersom mängden av ämnet vid tidpunkten 0 är 10 kg och $y(0) = C$, så måste $C = 10$. Vi vet vidare att när $t = 50$ så ska den ursprungliga mängden ha halverats, dvs $y(50) = 5$. Vi får:

$$\begin{aligned} y(50) = 5 &\iff 10e^{50k} = 5 \\ &\iff e^{50k} = \frac{1}{2} \\ &\iff 50k = \ln\frac{1}{2} \\ &\iff k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{50} = -\frac{\ln 2}{50}. \end{aligned}$$

   Mängden av ämnet vid tiden t är alltså $y(t) = 10e^{-(t\ln 2)/50}$ kg. Den 1 januari 2016 är mängden precis $y(10) = 10e^{-(10\ln 2)/50} = 10e^{-(\ln 2)/5} \approx 8.7$ kg.

   □

   Svar: $10e^{-(\ln 2)/5}$ kg

2. Beräkna nedanstående integraler.

A. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x + \cos x|\, dx$ (tips: dela upp integrationsintervallet)

B. $\displaystyle\int_1^{e} x^2 \ln x\, dx$ (tips: använd partiell integration)

Lösning. A. Eftersom $\sin x + \cos x$ är positivt då $0 < x < 3\pi/4$, negativt då $3\pi/4 < x < 7\pi/4$ och positivt igen då $7\pi/4 < x < 2\pi$ så har vi att

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |\sin x + \cos x|\, dx \\
&= \int_0^{3\pi/4} (\sin x + \cos x)\, dx - \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} (\sin x + \cos x)\, dx + \int_{7\pi/4}^{2\pi} (\sin x + \cos x)\, dx \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

B. Vi använder partiell integration och får

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^2 \ln x\, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx \\
&= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e \\
&= \frac{2e^3 + 1}{9}
\end{aligned}$$

□

Svar: A. $4\sqrt{2}$. B. $\frac{2e^3+1}{9}$

3. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1} + 2\arctan x$.
   A. Bestäm definitionsmängden till f.
   B. Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande.
   C. Avgör om f antar något största respektive minsta värde.
   D. Finn alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$
   E. Bestäm med hjälp av ovanstående värdemängden till f.

Lösning. Uppgift A och D: Definitionsmängden är hela $\mathbf{R}$. Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi$ har vi att $y = \pi$ är asymptot i oändligheten och $y = -\pi$ asymptot i minus oändligheten.

Uppgift B: Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x(x+2)}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2-4x+3}{(x^2+1)^2}.$$

Vi har två kritiska punkter, nämligen $x = 3$ och $x = 1$. Teckenstudium av derivatan:
Om $x < 1$ så är $f'(x)$ positivt.

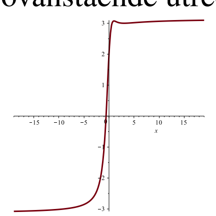
Om $1 < x < 3$ så är $f'(x)$ negativt.

Om $x > 3$ så är $f'(x)$ positivt.

Vi ser att f är strängt växande på intervallet $x \leq 1$, strängt avtagande på intervallet $1 \leq x \leq 3$ och strängt växande på intervallet $x \geq 3$

Uppgift C och E. Vi ser att vi har ett lokalt max i $x = 1$ (det lokala maxvärdet är $(3+\pi)/2$) och ett lokalt min i $x = 3$ (det lokala minvärdet är $1/2 + 2\arctan 3$). Men eftersom båda dessa lokala extremvärden ligger strikt mellan $-\pi$ och π kan de inte vara största/minsta värde till f, eftersom f antar värden hur nära π och $-\pi$ som helst. Det följer att f inte antar något största eller minsta värde. Värdemängden är $(-\pi, \pi)$.

Grafen kan skissas med hjälp av ovanstående utredning:



$\square$

Svar: Se lösningen.

DEL B

4. Vi ska Taylorutveckla funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.
   A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 4 kring punkten $x = 0$ till funktionen f.
   B. Använd polynomet i uppgift A för att beräkna ett närmevärde till $\ln 2$.
   C. Avgör om felet i ditt närmevärde är mindre än 0.25.

Lösning. A. Det sökta polynomet är $p(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$. Detta är ett standardpolynom (men man kan förstås också ta fram det genom derivering etc).
B. $\ln 2 = f(1) \approx p(1) = 7/12$
C. Feltermen är $\dfrac{f^{(5)}(c)}{5!}1^5$ för något tal c mellan 0 och 1, vilket till beloppet garanterat är mindre än $1/5$ eftersom $f^{(5)}(c) = 4!/(1+c)^4$. Svar ja.

$\square$

Svar: Se lösningen.

5. Vi ska bestämma tyngdpunkten (x_T, y_T) för övre halvan av den homogena enhetscirkelskivan, dvs området som ges av oliketerna $x^2 + y^2 \leq 1$ och $y \geq 0$. Av symmetriskäl är det uppenbart att $x_T = 0$, men y-koordinaten måste beräknas. Med hjälp av ett jämviktsresonemang kan man visa att

$$y_T = \frac{\displaystyle\int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\,dy}{\displaystyle\int_0^1 2\sqrt{1-y^2}\,dy}.$$

Beräkna y-koordinaten för tyngdpunkten!

Lösning. Vi ser att integralen i nämnaren precis ger arean av halvcirkelskivan, så den integralen måste vara $\pi/2$ (kan förstås också beräknas, t ex med substitutionen $y = \sin x$). Integralen i täljaren beräknar vi:

$$\int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\,dy = \left[\frac{-(1-y^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Vi ser alltså att y-koordinaten för tyngdpunkten blir $\dfrac{4}{3\pi}$

$\square$

Svar: $4/3\pi$

6. Ett föremål med massan m faller genom jordatmosfären mot jordens yta. Om vi antar att luftmotståndet är direkt proportionellt mot farten v fås enligt Newtons andra lag differentialekvationen

$$mv'(t) = -kv(t) + mg$$

där k är en positiv konstant och g tyngdaccelerationen.

A. Bestäm farten v vid en godtycklig tidpunkt t, om föremålet släpps från vila vid tidpunkten $t = 0$.

B. Visa att farten enligt modellen inte kan öka obegränsat utan kommer att närma sig ett visst värde efter lång tid. Bestäm detta värde.

Lösning. Låt oss börja med att skriva om differentialekvationen på det ekvivalenta sättet

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Lösningen v till differentialekvationen har strukturen $v = v_h + v_p$ där v_h är de allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation (med högerled 0) och v_p är någon partikulärlösning. Vi ser direkt att vi kan ta $v_p = gm/k$. För att hitta v_h ser vi att den karaktäristiska ekvationen $r + (k/m) = 0$ har lösning $r = -k/m$ varför $v_h = Ce^{-kt/m}$. Sammantaget har vi att

$$v(t) = Ce^{-kt/m} + \frac{gm}{k}, \quad \text{där } C \text{ är en godtycklig konstant}$$

är den allmänna lösningen till differentialekvationen. Att föremålet släpps från vila vid $t = 0$ betyder att $v(0) = 0$ så vi ska välja $C = -gm/k$.

Farten vid en godtycklig tidpunkt t ges alltså av

$$v(t) = \frac{-gm}{k}e^{-kt/m} + \frac{gm}{k} = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

B. Eftersom $e^{-kt/m}$ är strängt avtagande måste v vara strängt växande, och då $\lim_{t\to\infty} v(t) = gm/k$ så är detta det värde som farten närmar sig. Högre fart kan inte uppnås.

$\square$

Svar: A. $v(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$. B. gm/k

DEL C

7. Denna uppgift handlar om teorin kring lokala extrempunkter.
   A. Definiera vad som menas med en lokal maxpunkt till en funktion f.
   B. Bevisa följande påstående: Om funktionen f har en lokal maxpunkt i en inre punkt a i definitionsmängden och f är deriverbar i a, så är $f'(a) = 0$.
   C. Visa med ett exempel att en funktion kan ha en derivata som är 0 i en punkt utan att den punkten är en lokal extrempunkt.
   D. Visa med ett exempel att en funktion kan ha en lokal maxpunkt i en punkt utan att funktionen har en derivata som är 0 i den punkten.

Lösning. A. Punkten a i definitionsmängden till f är en lokal maxpunkt till f om det finns en omgivning I till a sådan att $f(a) \geq f(x)$ för alla $x \in I$ som ligger i definitionsmängden till f.

B. Anta att f är deriverbar i punkten a i det inre av definitionsmängden och att a är en lokal maxpunkt till f. För alla tillräckligt små positiva tal h gäller då att

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

eftersom täljaren är negativ och nämnaren positiv. Om vi låter $h \to 0^+$ får vi att $f'(a) \leq 0$. För alla tillräckligt små negativa tal h gäller tvärtom att

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

eftersom täljaren är negativ och nämnaren negativ. Om vi låter $h \to 0^-$ får vi att $f'(a) \geq 0$. Eftersom 0 är det enda tal som både är större än eller lika med 0 och mindre än eller lika med 0 så måste $f'(a) = 0$.

C. Funktionen $f(x) = x^3$ uppfyller att $f'(0) = 0$ samtidigt som $x = 0$ inte är en lokal extrempunkt (varken max eller min).

D. Funktionen $g(x) = -|x|$ har en lokal maxpunkt i origo men är inte deriverbar där.

□

Svar: Se lösningen

8. Betrakta kurvan med ekvation $y = x^4$. För varje punkt (x, y) på kurvan (utom origo) så har kurvan en normallinje som skär y-axeln i exakt en punkt $(0, b)$. Bestäm det minsta möjliga värdet på b.

Lösning. Vi sätter $f(x) = x^4$. Då f är jämn räcker det av symmetriskäl att studera problemet för positiva x. Vi deriverar och får $f'(x) = 4x^3$. Riktningskoefficienten för normalen till kurvan $y = x^4$ i punkten (x_0, x_0^4) är då $-1/4x_0^3$. Normalens ekvation fås som

$$y - x_0^4 = -\frac{1}{4x_0^3}(x - x_0).$$

Normalen skär y-axeln i punkten

$$\left(0, x_0^4 + \frac{1}{4x_0^2}\right).$$

Vi ska således minimera funktionen $d(x) = x^4 + \dfrac{1}{4x^2}$ då $x > 0$. Vi deriverar och får

$$d'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2x^3}.$$

Vi ser att för positiva x gäller att

$$d'(x) = 0 \iff x^6 = \frac{1}{8} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vi observerar att $d'(x)$ är negativt då $0 < x < 1/\sqrt{2}$ och positivt då $x > 1/\sqrt{2}$ så vi har en global minpunkt.

Det minsta möjliga värdet på b är därför $b = d(1/\sqrt{2}) = 3/4$.

$\square$

Svar: $3/4$

9. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x\sin x + \sqrt{x}}$$

är konvergent eller divergent.

Lösning. Integralen är generaliserad vid $x = 0$ då integranden är obegränsad där. Vi har att

$$0 \leq \frac{1}{x\sin x + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ då } 0 < x < \pi,$$

eftersom $x \sin x \geq 0$ på intervallet. Eftersom vidare

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} (2\sqrt{\pi} - 2\sqrt{c}) = 2\sqrt{\pi}$$

så följer det att

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x\sin x + \sqrt{x}}$$

är konvergent.

□

Svar: Konvergent