KTH Teknikvetenskap

Kontrollskrivning 2 SF1634 Differentialekvationer, VT2016
Fredag 11 mars 2016, kl. 13 - 15

Kontrollskrivningen består av tre uppgifter som var och en bedöms med maximalt 4 poäng. För godkänt krävs totalt 7 poäng eller mer. Godkänt resultat innebär att du får tillgodoräkna dig full poäng på uppgift 2 vid ordinarie tenamen och vid ordinarie omtentamen innevarande läsår.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt, fullständig och tydligt presenterad. Det innebär speciellt att införda beteckningar skall definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Tillåtna hjälpmedel: *BETA, Mathematics handbook for Science and Engineering*

Lycka till!

1. a) Låt $u_n(x,t)$ vara funktionen

$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t} \sin nx$$

där n är ett positivt heltal.
Visa att $u_n(x,t)$ uppfyller ekvationerna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad t > 0, 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \tag{3}$$

(1 p)

b) Bestäm en funktion $u(x,t)$ som uppfyller ekvationerna (1) – (3), och som dessutom uppfyller initialvillkoret

$$u(x,0) = \frac{x}{2}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{4}$$

(3 p)

2. Bestäm funktionen $f(t)$ så att dess Fouriertransform $\hat{f}$ ges av

$$\hat{f}(\omega) = H(\omega+1) - H(\omega-1),$$

där $H(t)$ betecknar Heavisidefunktionen.
Skissera också graferna till funktionerna $f(t)$ och $\hat{f}(\omega)$.
För full poäng på denna uppgift krävs
(i) dels att du visar att du kan genomföra de beräkningar som krävs för att bestämma $f(t)$, och inte bara förlitar dig på BETA,
(ii) och dels att graferna till $f(t)$ och $\hat{f}(\omega)$ är så pass tydliga att det går att utläsa funktionernas viktigaste egenskaper såsom t ex deras nollställen, var de är växande respektive avtagande samt grafernas övergripande utseende.

(4 p)

3. a) Definiera vad som menas med att en mängd $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ av reellvärda funktioner är ortogonal på ett interval (a,b).

(1 p)

b) Visa att mängden $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ är ortogonal på intervallet $(0,\pi)$.
Tips: Du kan ha nytta av identiteten

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

(3 p)

(I uppgift 3 avses ortogonalitet utan viktsfunktion, det vill säga att den inre produkten på (a,b) ges av $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.)