SF1634 Modell KS 2 V.T-16
Svar & Lösningsförslag

(1.) Sök $u(x,t)$ på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Ekvation (1) får då formen

$$X''T = XT'' \iff \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda \quad (\text{konstant})$$

$$\iff \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < 1 \quad (6) \\ T'' + \lambda T = 0, & t > 0 \quad (7) \end{cases}$$

Vi löser först (6) med de randvillkor som ges av (2) och (3)

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 & (8) \end{cases}$$
$$(3) \Rightarrow \begin{cases} X(1) = 0 & (9) \end{cases}$$

För $\lambda = \omega^2 > 0$ ger (6) att $X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

och (8) $\Rightarrow A = 0$, så $X(x) = B\sin\omega x$.

Villkoret (9) och kravet $B \neq 0$ ger $\sin\omega = 0$

så $\omega = \omega_n = n\pi$ är de möjliga värden på $\lambda = \omega^2$ som ger icketrivial lösning

$$X(x) = X_n(x) = B_n \sin n\pi x$$

För $\lambda = \lambda_n = \omega_n^2 = n^2\pi^2 > 0$ ger (7) att

$$T(t) = T_n(t) = C_n \cos n\pi t + D_n \sin n\pi t$$

och

$$u_n(x,t) = X_n T_n = (c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t)\sin n\pi x.$$

För $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$ ger (6) med villkoren (8) & (9) endast trivial lösning $X(x) \equiv 0$ vilket ger $u(x,t) \equiv 0$, som ej uppfyller (4).

Genom superposition får vi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t) \sin n\pi x$$

som uppfyller (1) – (3).

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \underset{(4)}{\overset{\text{ska vara}}{=}} 3\sin \pi x - 2\sin 4\pi x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n\pi c_n \sin n\pi t + n\pi d_n \cos n\pi t\right) \sin n\pi x \Big|_{t=0}$$

$$= \sum n\pi d_n \sin n\pi x \underset{(5)}{\overset{\text{ska vara}}{=}} 0, \quad 0 < x < 1$$

Vi ser att $c_1 = 3$, $c_4 = -2$,

$c_n = 0$, $n \neq 1, 4$ och $d_n = 0$ $\forall n \geq 1$

ger lösning som uppfyller (4) & (5),

$$\boxed{u(x,t) = 3\cos \pi t \sin \pi x - 2\cos 4\pi t \sin 4\pi x}$$

2 a) f är en udda funktion, så Fourierserien består bara av sinustermer, så den har formen

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \left\{ \begin{array}{c} f \text{ udda, så} \\ f(t)\sin nt \text{ är} \\ \text{jämn} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot \sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos nt\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

så $\boxed{S(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}\sin nt}$

b) $$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\pi}^{0}(-1)e^{-i\omega t}\,dt + \int_0^{\pi} 1\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{t=-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{t=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left(1 - e^{i\omega\pi}\right) + \frac{1}{i\omega}\left(1 - e^{-i\omega\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left(2 - (e^{i\omega\pi} + e^{-i\omega\pi})\right) = \frac{1}{i\omega}\left(2 - 2\cos\omega\pi\right)$$

$$= \frac{2i}{\omega}\left(\cos\omega\pi - 1\right)$$

Alltså har $g(t)$ Fourierintegral $I_g(t)$

$$I_g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i}{\omega}(\cos\omega\pi - 1)e^{i\omega t}\,d\omega = \boxed{\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega\pi)-1}{\omega}e^{i\omega t}\,d\omega}$$

(3.) Antag att $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$ (1)

och $\int_0^1 \Phi_n(x) \Phi_m(x)\, dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$ (2).

Multiplicera V.L. och H.L. i (1) med $\Phi_m(x)$, och integrera sedan V.L. och H.L. (termvis) på intervallet $(0,1)$,

$$\int_0^1 f(x) \Phi_m(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^1 \Phi_n(x) \Phi_m(x)\, dx}_{\substack{= 0 \quad n \neq m \\ \neq 0 \quad n = m \\ \text{(enligt (2)}}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) \Phi_m(x)\, dx = c_m \int_0^1 \Phi_m(x) \Phi_m(x)\, dx$$

$$\Rightarrow c_m = \frac{\int_0^1 f(x) \Phi_m(x)\, dx}{\int_0^1 (\Phi_m(x))^2\, dx}$$

<u>Svar:</u> $\boxed{c_n = \dfrac{\int_0^1 f(x)\, \Phi_n(x)\, dx}{\int_0^1 (\Phi_n(x))^2\, dx}}$