SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Nittonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

8 mars 2016

Repetition

- Areaelementet dS ges av

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| \, dsdt$$

  om $\mathbf{r}(s, t)$ är en parametrisering av ytan S.
- En normalvektor $\mathbf{n}$ till S ges av

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, t)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right)$$

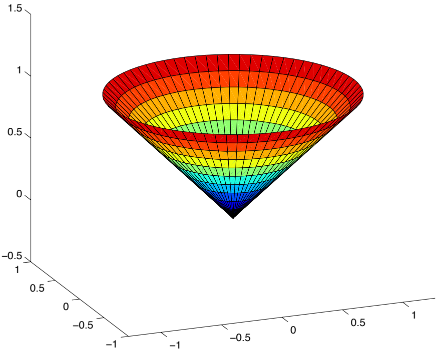
- Flödet av $\mathbf{F}$ genom en yta S med normerad normalvektor $\mathbf{N}$ ges av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \left(\mathbf{F}(\mathbf{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \right) dsdt.$$

Tentamenuppgift på flöde

Exempel (Uppgift 6 på tentamen i SF1626 den 17 mars 2014)

Beräkna flödet av $\mathbf{F} = (-y, x, z^2)$ ned genom den koniska ytan som ges av $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.



Divergens och rotation

Definition

Om **F** är ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$ ges divergensen av

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

och rotationen av

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Obs!

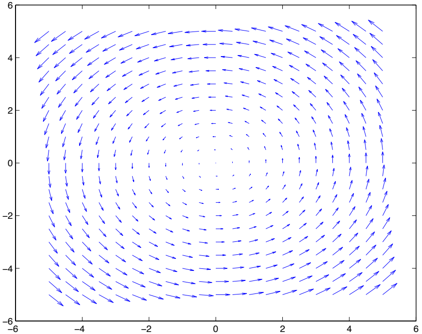
Divergensen är ett skalärfält, dvs en reellvärd funktion och rotationen är ett vektorfält.

Rotationen

Fråga

Vad är rotationen av $\mathbf{F} = (-y, x, 0)$*?*

A. 0
B. $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$
C. 2
D. -2
E. $(0, 0, 2)$
F. $(0, 0, -2)$
G. $(-1, 1, 0)$
H. $(1, -1, 0)$



Egenskaper

Sats

1. $\textbf{div rot F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
2. $\textbf{rot grad } f = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

om **F** *är kontinuerligt deriverbart och f är två gånger kontinuerligt deriverbar.*

Definition

Ett vektorfält **F** kallas rotationsfritt[1] om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
Det kallas divergensfritt[2] om $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

[1] irrotational
[2] solenoidal

Greens formel

Sats (Greens formel)

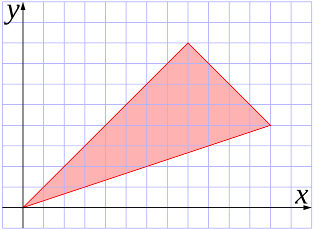
Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ *är ett* $\mathcal{C}^1$ *-vektorfält i ett öppet område* Ω *och det kompakta delområdet* D *har en rand* ∂D *som är styckvis* C^1 *med positiv orientering så gäller att*

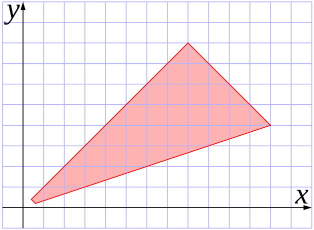
$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Greens formel vid generaliserad integral

Exempel (Tentamen 130312, Uppg 8)

Betrakta $\iint_D \frac{dxdy}{x+y}$ där D är triangel med hörn i $(0,0)$, $(2,2)$ och $(3,1)$. Förklara varför detta är en generaliserad integral. (Kan vi använda Greens formel?)





- Klipp av triangeln nära origo så att förutsättningarna för Greens formel är uppfyllda.
- Se vad som händer då vi klipper bort mindre och mindre bit.

Area med Greens formel

Om $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ får vi områdets area genom

$$\mu(D) = \iint_D 1\, dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Exempelvis får vi

$$\mu(D) = \int_{\partial D} -y\, dx = \int_{\partial D} x\, dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y\, dx + x\, dy.$$

Exempel

Beräkna arean av området som ges av $r \leq \sin^2 \varphi$ i polära koordinater.

Flöde genom kurva

Om vi istället för att beräkna vektorfältets del utefter kurvan ser på den del som är ortogonal mot kurvan får vi flödet genom kurvan som

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds$$

där $\mathbf{N}$ är en normerad normalvektor till γ i den aktuella punkten. Eftersom vi kan se $d\mathbf{r}$ som (dx, dy) kan vi se $\mathbf{N}\, ds$ som $(-dy, dx)$ eller $(dy, -dx)$ beroende på vilket håll vi väljer normalvektorn.

Exempel

Beräkna flödet ut genom enhetscirkeln av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y) = \mathbf{grad}\, \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Divergenssatsen i planet

Med Green's formel kan vi skriva om flödet av $\mathbf{F} = (P, Q)$ genom randen till ett område D som

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \int_{\partial D} (P, Q) \cdot (dy, -dx) = \int_{\partial D} -Q\, dx + P\, dy$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D \operatorname{\mathbf{div}} \mathbf{F}\, dxdy$$

Sats (Divergenssatsen)

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \iint_D \operatorname{\mathbf{div}} \mathbf{F}\, dxdy$$