

SE1634 Modell KS 2 V.T-16

Svar & Lösningsförslag

1. Sök  $u(x,t)$  på formen  $u(x,t) = \bar{X}(x)\bar{T}(t)$ .  
 Ekvation (1) får då formen  $\bar{X}''\bar{T} = \bar{X}\bar{T}'' \Leftrightarrow \frac{\bar{X}''}{\bar{X}} = \frac{\bar{T}''}{\bar{T}} = -\lambda$  (konstant)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X}'' + \lambda \bar{X} = 0 & , 0 < x < 1 & (6) \\ \bar{T}'' + \lambda \bar{T} = 0 & , t > 0 & (7) \end{cases}$$

Vi löser först (6) med de randvillkor som ges av (2) och (3)

$$(2) \Rightarrow \bar{X}(0) = 0 \quad (8)$$

$$(3) \Rightarrow \bar{X}(1) = 0 \quad (9)$$

För

$\lambda = \omega^2 > 0$  ger (6) att  $\bar{X}(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$

och (8)  $\Rightarrow A = 0$ , så  $\bar{X}(x) = B \sin \omega x$ .

Villkoret (9) och kravet  $B \neq 0$  ger  $\sin \omega = 0$

så  $\omega = \omega_n = n\pi$  är de möjliga värden på  $\lambda = \omega^2$  som ger icke-trivial lösning

$$\bar{X}(x) = \bar{X}_n(x) = B_n \sin n\pi x$$

För  $\lambda = \lambda_n = \omega_n^2 = n^2\pi^2 > 0$  ger (7) att

$$\bar{T}(t) = \bar{T}_n(t) = C_n \cos n\pi t + D_n \sin n\pi t$$

och

$$u_n(x,t) = \bar{X}_n \bar{T}_n = (C_n \cos n\pi t + D_n \sin n\pi t) \sin n\pi x.$$

För  $\lambda = 0$  och  $\lambda < 0$  ger (6) med villkoren (8) & (9)

endast trivial lösning  $\bar{X}(x) \equiv 0$

vilket ger  $u(x,t) \equiv 0$ , som ej uppfyller (4).

Genom superposition får vi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t) \sin n\pi x$$

som uppfyller (1) - (3).

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \stackrel{\text{skäva}}{=} 3 \sin \pi x - 2 \sin 4\pi x \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi c_n \sin n\pi t + n\pi d_n \cos n\pi t) \sin n\pi x \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi d_n \sin n\pi x \stackrel{\text{skäva}}{=} 0, \quad 0 < x < 1 \quad (5)$$

Vi ser att  $c_1 = 3$ ,  $c_4 = -2$ ,

$c_n = 0$ ,  $n \neq 1, 4$  och  $d_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

ger lösning som uppfyller (4) & (5),

$$u(x,t) = 3 \cos \pi t \sin \pi x - 2 \cos 4\pi t \sin 4\pi x$$

② a)  $f$  är en udda funktion, så  
 Fourierserien består bara av sinus termer,  
 så den har formen

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \left\{ \begin{array}{l} f \text{ udda, så} \\ f(t) \sin nt \text{ är} \\ \text{jämn} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos nt \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

se  $S(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nt$

b)  $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} \, dt = \int_{-\pi}^0 (-1) e^{-i\omega t} \, dt + \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-i\omega t} \, dt$

$$= \left[ \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{t=-\pi}^0 + \left[ -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{i\omega} (1 - e^{i\omega\pi}) + \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega\pi}) =$$

$$= \frac{1}{i\omega} (2 - (e^{i\omega\pi} + e^{-i\omega\pi})) = \frac{1}{i\omega} (2 - 2\cos\omega\pi)$$

$$= \frac{2i}{\omega} (\cos\omega\pi - 1)$$

Alltså har  $g(t)$  Fourierintegral  $\frac{I_g(t)}{2\pi}$

$$I_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i}{\omega} (\cos\omega\pi - 1) e^{i\omega t} \, d\omega = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega\pi - 1}{\omega} e^{i\omega t} \, d\omega$$

3. Antag att  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{\Phi}_n(x)$  (1)

och  $\int_0^1 \bar{\Phi}_n(x) \bar{\Phi}_m(x) dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$  (2)

Multiplisera v.l. och H.L. i (1) med  $\bar{\Phi}_m(x)$ , och integrera sedan v.l. och H.L. (termvis) på intervallet

$(0,1)$ ,

$$\int_0^1 f(x) \bar{\Phi}_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^1 \bar{\Phi}_n(x) \bar{\Phi}_m(x) dx}_{\begin{matrix} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{matrix}} \quad \text{(enligt (2))}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) \bar{\Phi}_m(x) dx = c_m \int_0^1 \bar{\Phi}_m(x) \bar{\Phi}_m(x) dx$$

$$\Rightarrow c_m = \frac{\int_0^1 f(x) \bar{\Phi}_m(x) dx}{\int_0^1 (\bar{\Phi}_m(x))^2 dx}$$

Svar:  $c_n = \frac{\int_0^1 f(x) \bar{\Phi}_n(x) dx}{\int_0^1 (\bar{\Phi}_n(x))^2 dx}$