KTH Teknikvetenskap

Modellskrivning till KS2 SF1634 Differentialekvationer, VT2016

Kontrollskrivningen består av tre uppgifter som var och en bedöms med maximalt 4 poäng. För godkänt krävs totalt 7 poäng eller mer. Godkänt resultat innebär att du får tillgodoräkna dig full poäng på uppgift 2 vid ordinarie tenamen och vid ordinarie omtentamen innevarande läsår.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt, fullständig och tydligt presenterad. Det innebär speciellt att införda beteckningar skall definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Tillåtna hjälpmedel: *BETA, Mathematics handbook for Science and Engineering*

Lycka till!

1. Bestäm en funktion $u(x,t)$ som uppfyller ekvationerna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = 3\sin \pi x - 2\sin 4\pi x, \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{5}$$

(4 p)

2. a) Bestäm Fourierserien till funktionen f definierad på intervallet $[-\pi, \pi]$ av

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi \\ -1, & -\pi \le t < 0 \end{cases}.$$

(2 p)

b) Bestäm Fourierintegralen till funktionen $g(t)$ definierade på $(-\infty, \infty)$ av

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi \\ -1, & -\pi \le t < 0 \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}.$$

(2 p)

För full poäng på denna uppgift krävs att du visar att du kan utföra de beräkningar som krävs för att bestämma Fourierserien respektive Fourierintegralen, och inte bara förlitar dig på *BETA*

3. Låt $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ vara en mängd av reellvärda funktioner definerade på intervallet $[0,1]$ sådana

$$\int_0^1 \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx \begin{cases} = 0, & m \neq n, \\ \neq 0, & m = n. \end{cases}$$

Antag att $f(x)$ är en funktion, också definierade på $[0,1]$, som kan skrivas en linjärkombination av funktionerna $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Det vill säga, vi antar att det finns konstanter $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sådana att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x), \quad 0 \le x \le 1.$$

Härled en formel för koefficienterna c_n.

(4 p)