

SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Sextonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

24 februari 2016

Inför laborationsredovisningen

- ▶ Redovisningarna är i sal, **röd**, som inte är så stor. Det finns ingen direkt tid eller plats för hjälp/handledning.
- ▶ Kom i god tid för er redovisning.
- ▶ Logga in på en dator och ha Matlab med era program framme när det är er tur.
- ▶ Var väl förberedda.
- ▶ Det finns fortfarande fler redovisningstider. Anmäl er!

Repetition

- ▶ **Trippelintegraler** $\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz$ ges av Riemannsummor.
- ▶ Variabelbyte med beloppet av **Jacobianen**, $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)} \right|$.
- ▶ Vid cylinderkoordinater är $dx dy dz = r dr d\theta dz$.
- ▶ Vid sfäriska koordinater är $dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$.
- ▶ Volymen av en kropp K ges av

$$V = \iiint_K 1 dx dy dz.$$

- ▶ **Tyngdpunkten**, eller **masscentrum**, hos en kropp K ges av

$$(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{m} \iiint_K (x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

- ▶ **Tröghetsmomentet** för en kropp ges av

$$J = \iiint_K \rho(x, y, z) D^2(x, y, z) dx dy dz$$

Tröghetsmoment

Rörelseenergin för en stelkropp K under rotation med en vinkelhastighet ω ges av $J\omega^2/2$ där

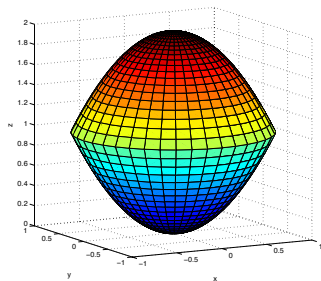
$$J = \iiint_K \rho(x, y, z) D^2(x, y, z) dx dy dz$$

där $D(x, y, z)$ är avståndet från (x, y, z) till rotationsaxeln.

Exempel (Tentamen 2013-01-10, Uppgift 3)

Kroppen K ges av
 $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.
Beräkna tröghetsmomentet
m.a.p. z-axeln, dvs

$$\iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz$$

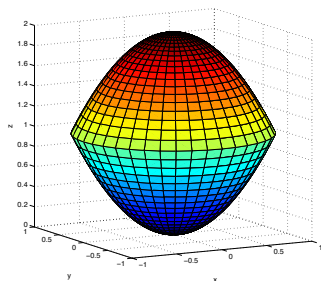


Tröghetsmoment

Exempel (Tentamen
2013-01-10, Uppgift 3)

Kroppen K ges av
 $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.
Beräkna tröghetsmomentet
m.a.p. z-axeln, dvs

$$\iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz$$



Fråga

Var börjar vi?

- A. Beskriva kroppen
- B. Välja koordinater (rektangulära, sfäriska eller cylindriska)
- C. Välja integrationsmetod

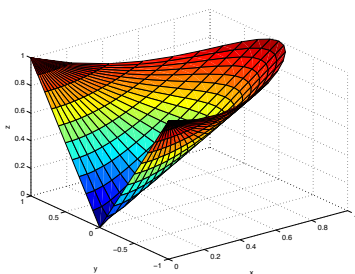
Area av en yta

Vi kan beräkna arean av en yta som parametriseras av $\mathbf{r}(s, t)$ genom

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt$$

Exempel (SF1626 –
Tentamen 2013-05-27,
Uppgift 5)

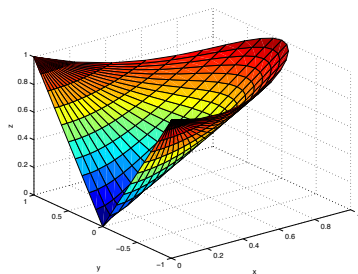
Beräkna arean av den del S av
den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
som ligger över området
 $0 \leq x \leq 1 - y^2$ i xy -planet.



Area av en yta

Exempel (SF1626 –
Tentamen 2013-05-27,
Uppgift 5)

Beräkna arean av den del S av
den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
som ligger över området
 $0 \leq x \leq 1 - y^2$ i xy -planet.



Fråga

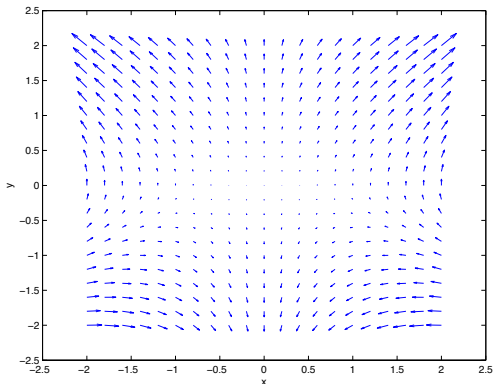
Var börjar vi?

- A. Välja parametrisering av ytan
- B. Välja koordinater (rektangulära, polära, andra?)
- C. Välja integrationsmetod

Vektorfält

Definition

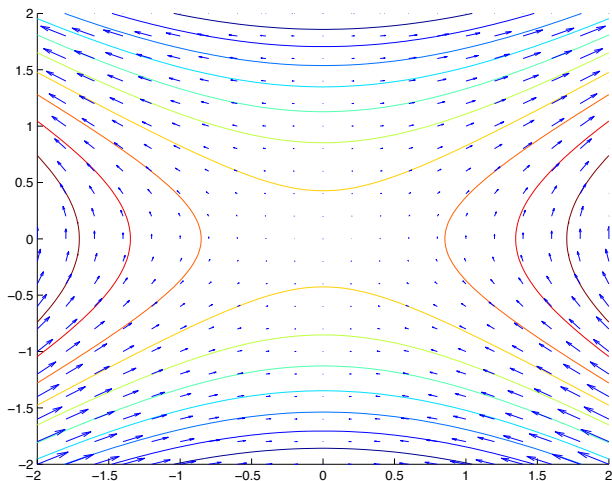
Ett **vektorfält** på ett område D i \mathbb{R}^n är en funktion $\mathbf{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$.



Figur : Matlab ritar ut vektorfält med quiver

Fältlinjer

Vektorfältets **fältlinjer** har vektorfältet som tangentvektorer.



Konservativa vektorfält och potentialer

Definition

Ett vektorfält \mathbf{F} är **konservativt** om $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon **potential** f .

Sats

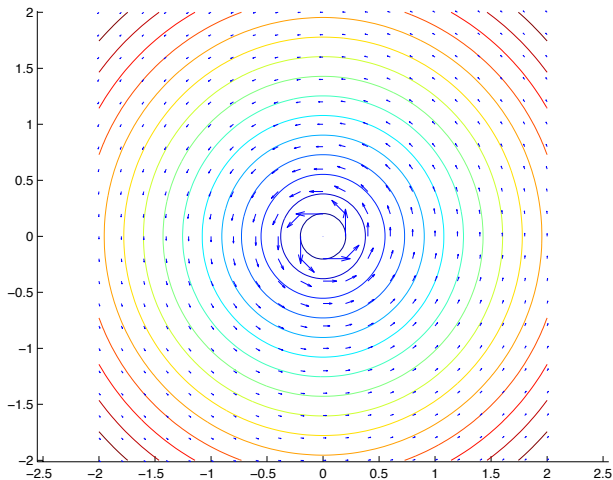
Om $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ så gäller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Fråga

Vad av följande stämmer?

- A. Alla vektorfält med $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ är konservativa.
- B. Det kan finnas vektorfält med $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ som inte är konservativa.
- C. Båda ovanstående stämmer.
- D. Inget av dem stämmer.

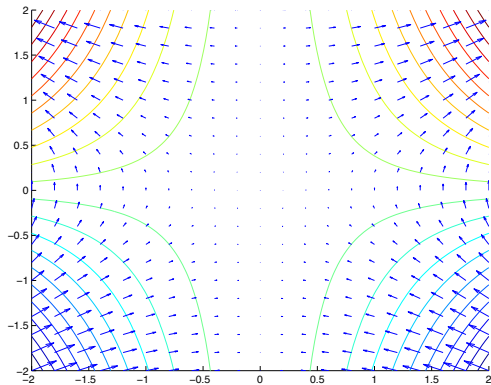
Ett exempel på icke-konservativt fält med $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$



Ekvipotentiallinjer

Definition

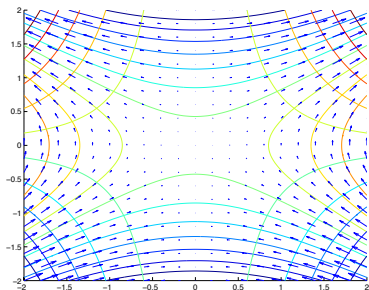
För ett konservativt vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ ges **ekvipotentiallinjerna** av nivåkurvorna för potentialen f .



Fält- och ekvipotentiallinjer

Sats

Fältlinjer och ekvipotentiallinjer är vinkelräta mot varandra.



Bevis.

$\nabla f(x, y)$ är vinkelrät mot alla nivåkurvor $f(x, y) = c$.

