SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Femtonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

22 februari 2016

Trippelintegraler

På samma sätt som vi delade in rektanglar i mindre rektanglar kan vi dela in rätblock i mindre rätblock. Därmed kan vi definiera Riemannintegralen för funktioner i tre variabler över ett rätblock Δ:

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z)\, dxdydz$$

Definition

Ett område i $\mathbb{R}^3$ är kvadrerbart om dess rand är en nollmängd, dvs kan täckas av rätblock av godtyckligt liten sammanlagd volym.

Definition

En funktion är integrerbar på ett kvadrerbart område om översummor och undersummor kommer godtyckligt nära varandra när indelningen blir tillräckligt fin.

Integration av kontinuerliga funktioner på kompakta mängder

Sats

En kontinuerlig funktion på en kompakt kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^3$ *är integrerbar.*

Fråga

Är $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *integrerbar på området där* $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ *och* $-2 \leq z \leq 2$*?*

A. Ja

B. Nej

C. Vet ej

Variabelbyte i trippelintegraler

Vid variabelbyte

$$\begin{cases} x &= g_1(u,v,w) \\ y &= g_2(u,v,w) \\ z &= g_3(u,v,w) \end{cases}$$

behöver vi använda Jacobianen

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

och får

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iiint_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x &= r\sin\phi\cos\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\phi \end{cases}$$

ger oss sfäriska koordinater och Jacobianen blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)} &= \det\begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \\ &= (\cos\phi)(r^2\cos\phi\sin\phi)\det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &\quad - (-r\sin\phi)(r\sin^2\phi)\det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = r^2\sin\phi \end{aligned}$$

Volymsberäkning

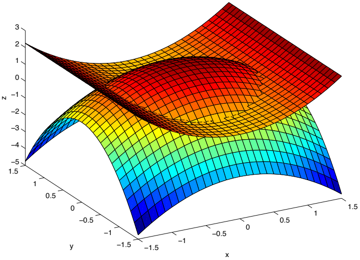
Vi kan beräkna volymen av området K mellan två grafer $z = f(x,y)$ och $z = g(x,y)$ genom

$$\iiint_K 1\,dxdyxz = \iint_D g(x,y) - f(x,y)\,dxdy$$

där D är området där $f(x,y) \leq z \leq g(x,y)$.

Exempel (SF1626 – Tentamen 2013-05-27, Uppgift 2)

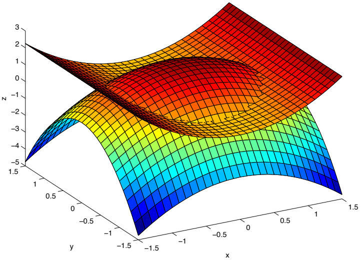
Beräkna volymen av det område som begränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - x^2 - 2y^2$.



Volymsberäkning

Exempel (SF1626 – Tentamen 2013-05-27, Uppgift 2)

Beräkna volymen av det område som begränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - x^2 - 2y^2$.



Fråga

Var börjar vi?

A. Beskriva området

B. Välja koordinater (rektangulära, polära, andra?)

C. Välja integrationsmetod

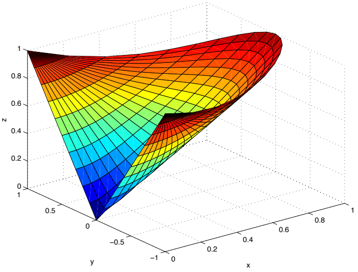
Area av en yta

Vi kan beräkna arean av en yta som parametriseras av $\mathbf{r}(s, t)$ genom

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| dsdt$$

Exempel (SF1626 – Tentamen 2013-05-27, Uppgift 5)

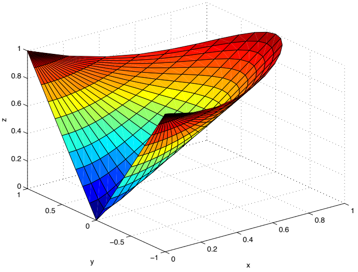
Beräkna arean av den del S av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger över området $0 \leq x \leq 1 - y^2$ i xy-planet.



Area av en yta

Exempel (SF1626 – Tentamen 2013-05-27, Uppgift 5)

Beräkna arean av den del S av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger över området $0 \leq x \leq 1 - y^2$ i xy-planet.



Fråga

Var börjar vi?

A. Välja parametrisering av ytan

B. Välja koordinater (rektangulära, polära, andra?)

C. Välja integrationsmetod

Tröghetsmoment

Rörelseenergin för en stelkropp K under rotation med en vinkelhastighet ω ges av $J\omega^2/2$ där

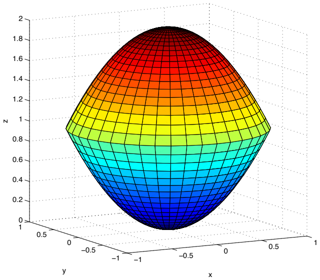
$$J = \iiint_K \rho(x,y,z) D^2(x,y,z)\, dxdydz$$

där $D(x,y,z)$ är avståndet från (x,y,z) till rotationsaxeln.

Exempel (Tentamen 2013-01-10, Uppgift 3)

Kroppen K ges av $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$. Beräkna tröghetsmomentet m.a.p. z-axeln, dvs

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dxdydz$$

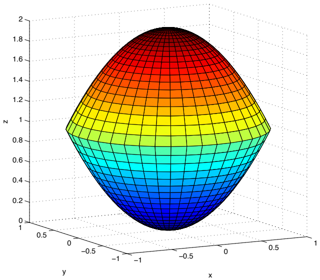


Tröghetsmoment

Exempel (Tentamen 2013-01-10, Uppgift 3)

Kroppen K ges av $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$. Beräkna tröghetsmomentet m.a.p. z-axeln, dvs

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dxdydz$$



Fråga

Var börjar vi?

A. Beskriva kroppen
B. Välja koordinater (rektangulära, sfäriska eller cylindriska)
C. Välja integrationsmetod

Tyngdpunkt

Vi kan beräkna tyngdpunkten hos en stelkropp K genom

$$(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{V} \iiint_K (x, y, z)\rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

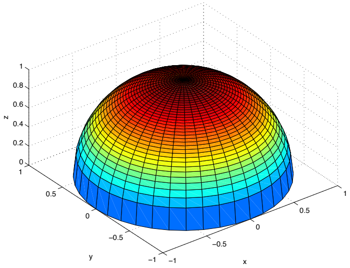
där V är kroppens volym.

Exempel (Tentamen 2013-08-22, Uppgift 6)

Låt K vara ett homogent halvklot som har radie R, medelpunkt i origo och ligger över xy-planet. Beräkna z-koordinaten för kroppen K:s masscentrum, dvs

$$\frac{1}{V} \iiint_K z\, dxdydz$$

där V är volymen av K.



Tentamensuppgift om tyngdpunkt

Uppgift

Betrakta den homogena kropp K som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$$

För att bestämma masscentrum för K behöver man bland annat beräkna integralen

$$I_z = \iiint_K z \, dxdydz.$$

1. Hur beräknas masscentrum för K? **(1 p)**
2. Beräkna integralen I_z. **(3 p)**

Medelvärden

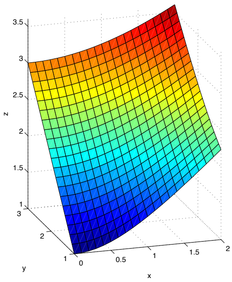
Vi kan beräkna medelvärden över områden genom

$$m_K(f) = \frac{\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_K 1\,dxdydz}$$

i rummet eller

$$m_D(f) = \frac{\iint_D f(x,y)\,dxdy}{\iint_D 1\,dxdy}$$

i planet.



Exempel

Bestäm det genomsnittliga avståndet till origo från punkter i rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 3$, dvs beräkna

$$\frac{1}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$