

Interpolation

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

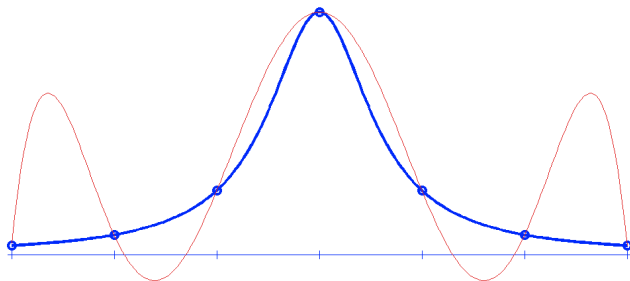
SF1669, VT 2016

Existens och entydighet

Om x_0, x_1, \dots, x_n är distinkta finns ett unikt polynom av gradtal max n som interpolerar punkterna $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

Ex 1: Exakt en linje passerar genom två distinkta punkter.

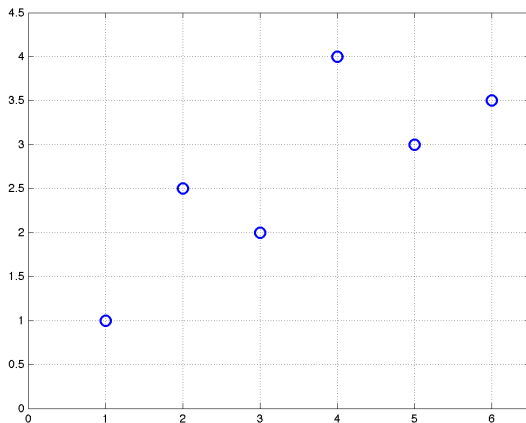
Ex 2: Ett 6gradspolynom interpolerar 7 punkter:



Fråga 1

Hur stort gradtal behövs för att interpolera punkterna?

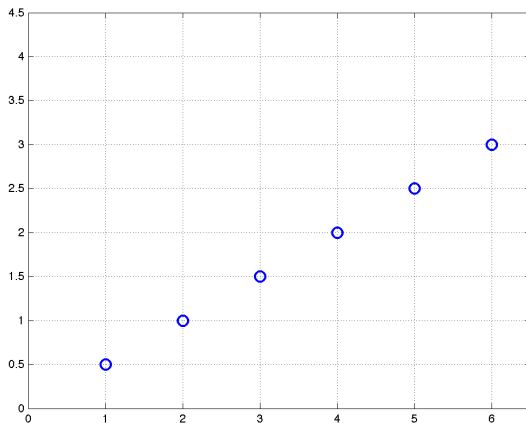
- 1 grad 3
- 2 grad 4
- 3 grad 5
- 4 grad 6
- 5 grad 7

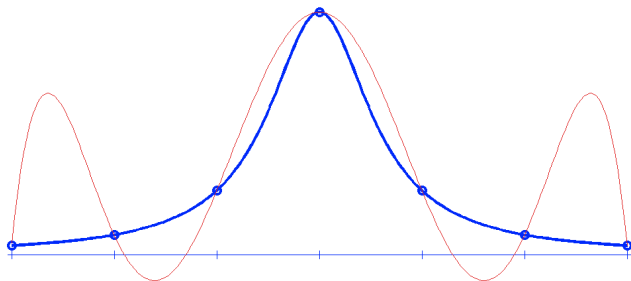


Fråga 2

Hur stort gradtal behövs för att interpolera punkterna?

- 1 grad 1
- 2 grad 2
- 3 grad 3
- 4 grad 4
- 5 grad 5





Beräknas genom att lösa linjärt ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

där $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$

Fråga 3

Vi vill interpolera punkterna $(0, 9)$, $(2, -2)$ och $(5, 1)$. med andragradspolynomet $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Vilket ekvationssystem behöver lösas?

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpolationsfel

Antag att $f(x)$ är en snäll funktion.

Interpolationsfelet (punktvis)

Om polynomet $p(x)$ av gradtal $\leq n$ interpolerar $f(x)$ i noderna $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, och $x \in [x_0, x_n]$,

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

för något $\xi \in [x_0, x_n]$. (Notera att ξ beror på x).

Maxfelet vid linjär interpolation

Om $p(x)$ är linjär funktion som interpolerar $f(x)$ i noderna a och b gäller

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|$$

Fråga 4

$p(x)$ interpolerar e^{-x} i $x = 0, 1, 2$. Vad säger satsen om felet i $x = 1/2$?

- 1 $|e^{-1/2} - p(1/2)| \leq 1$
- 2 $|e^{-1/2} - p(1/2)| \leq 1/10$
- 3 $|e^{-1/2} - p(1/2)| \leq 1/12$
- 4 $|e^{-1/2} - p(1/2)| \leq 1/16$
- 5 $|e^{-1/2} - p(1/2)| \leq 1/100$

Fråga 5

$p(x)$ interpolerar e^x linjärt i $x = 2.5$ och $x = 3$. Vad säger satsen om maxfelet i intervallet $[2.5, 3]$?

1

$$\max_{x \in [2.5, 3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{16} e^3$$

2

$$\max_{x \in [2.5, 3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{16} e^{2.5}$$

3

$$\max_{x \in [2.5, 3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{32} e^3$$

4

$$\max_{x \in [2.5, 3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{32} e^{2.5}$$

5

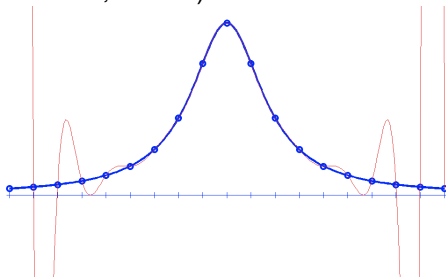
$$\max_{x \in [2.5, 3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{8} e^3$$

Ekvidistant interpolation

Lika långt mellan alla noder i intervallet $[a, b]$

$$x_j = a + jh, \quad h = (b - a)/n,$$

för n noder. (n antas stort, h litet.)



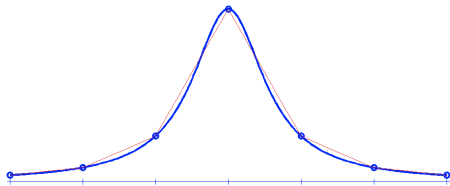
Interpolation med högt gradtal på ekvidistanta noder ofta dåligt. Ger stora fel på grund av **Runges fenomen** (vilda oscillationer i intervallets ändpunkter). Felet $\nrightarrow 0$ när antal punkter n ökar.

Ekvidistant interpolation

Lika långt mellan alla noder i intervallet $[a, b]$

$$x_j = a + jh, \quad h = (b - a)/n,$$

för n noder. (n antas stort, h litet.)



Styckvis polynominterpolation bättre.

Styckvis linjär interpolation

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|$$

Felet $\rightarrow 0$ som $O(h^2)$ när $h \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Noggrannhetsordning 2.