Numerisk integration och noggrannhetsordning

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2016

Numerisk integration

- Trapetsregeln = exakt integration av styckvis linjär interpolation

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

  där $x_j = a + jh$ och $h = (b-a)/n$.
  Noggrannhetsording 2.

- Simpsons formel = exakt integration av styckvis kvadratisk interpolation

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{\substack{j \text{ udda} \\ 0<j<n}} f(x_j) + 2\sum_{\substack{j \text{ jämn} \\ 0<j<n}} f(x_j) + f(x_n)\right).$$

  Noggrannhetsording 4.

Fråga

Vi löser

$$\int_{-1}^{1} e^{\cos(x)} dx$$

med trapetsregeln och steglängd $h = 1/20$. Felet blir ≈ 0.003197. Vad blir felet om vi tar steglängd $h = 1/40$?

1. ≈ 0.002
2. ≈ 0.0002
3. ≈ 0.0016
4. ≈ 0.0008
5. ≈ 0.0004

Fråga

Integralerna nedan approximeras med trapetsregeln och steglängd $h = 1/40$. I vilket/vilka av fallen blir felet 0?

1. $\int_0^1 2x + 3\,dx$
2. $\int_0^1 1 - 4x^2 + 3\,dx$
3. $\int_0^1 \frac{2}{1+x}\,dx$
4. $\int_0^1 323x\,dx$
5. $\int_0^1 8x^3 - 2x\,dx$
6. $\int_0^1 2\,dx$

Vad blir svaret om vi istället använder Simpsons formel?

Numerisk integration i 2D

Betrakta dubbelintegralen

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Ide: Applicera 1D-varianten av trapetsregeln på de upprepade integralerna. Använd $n+1$ punkter i x-led och $m+1$ punkter i y-led:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \approx \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_k, y_j) h_x h_y w_{j,k}$$

där

$$w_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{inre punkter,} \\ 1/2, & \text{kantpunkter,} \\ 1/4, & \text{hörnpunkter.} \end{cases}$$

Nodpunkterna ges av $x_k = a + kh_x$ och $h_x = (b-a)/n$ och $y_j = c + jh_y$ och $h_y = (d-c)/m$.

Fråga

Approximera

$$\int_0^1 \int_0^1 \cos^2(xy\pi)dxdy$$

med trapetsregeln och steglängd $h = 1/2$. Svaret blir

1. 1/2
2. 5/8
3. 13/8
4. 5/2
5. 13/2

Noggrannhetsordning

Definition

Noggrannhetsordning för $u_h \approx u$ är det största p så att

$$|u_h - u| \leq Ch^p,$$

för något tal C som är oberoende av h.

Ofta gäller starkare samband

$$u_h - u \approx Ch^p \qquad \Rightarrow$$

- Felet minskar med faktorn 2^p när h halveras
- Plot av felet $|u_h - u|$ mot h i loglog ger rak linje med lutning p
- $|u_{h/2} - u| \leq |u_h - u_{h/2}|$ (om $p \geq 1$) $\Rightarrow$ Gör alltid (minst) två beräkningar, med h och $h/2$, för att få en uppfattning av felet.
- Noggrannhetsordningen kan uppskattas från u_h, $u_{h/2}$ och $u_{h/4}$,

$$\frac{u_h - u_{h/2}}{u_{h/2} - u_{h/4}} \approx 2^p.$$

Fråga

Felen vid en viss typ av interpolation med olika steglängder h blev

h	0.2	0.1	0.05	0.025
fel	$1.8365 \cdot 10^{-4}$	$1.2042 \cdot 10^{-5}$	$7.6157 \cdot 10^{-7}$	$4.7738 \cdot 10^{-8}$

Vad är noggrannhetsordningen?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

Fråga

Resultaten I_h från en viss numerisk kvadraturmetod med olika steglängder h var

h	I_h
0.2	2.316862297395430
0.1	2.329191965533794
0.05	2.335375321801691
0.025	2.338472882736823

Vad är noggrannhetsordningen?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5