Interpolation

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2016

Interpolation

Existens och entydighet

Om $x_0, x_1, \ldots, x_n$ är distinkta finns ett unikt polynom av gradtal max n som interpolerar punkterna $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Ex: Exakt en linje passerar genom två distinkta punkter.

Beräknas genom att lösa linjärt ekvationssystem

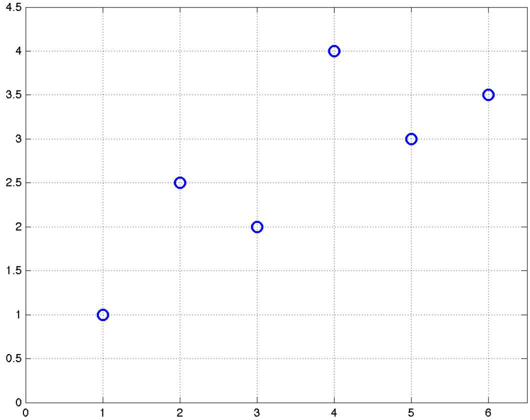
$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

där $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$

Fråga 1

Hur stort gradtal behövs för att interpolera punkterna?

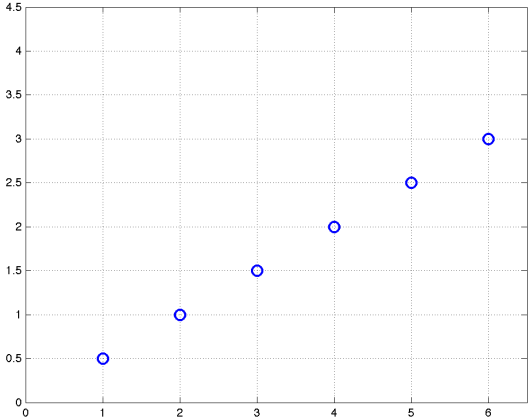
1. grad 3
2. grad 4
3. grad 5
4. grad 6
5. grad 7



Fråga 2

Hur stort gradtal behövs för att interpolera punkterna?

1. grad 1
2. grad 2
3. grad 3
4. grad 4
5. grad 5



Fråga 3

Vi vill interpolera punkterna $(0, 9)$, $(2, -2)$ och $(5, 1)$. med andragradspolynomet $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. Vilket ekvationssystem behöver lösas?

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpolationsfel

Antag att $f(x)$ är en snäll funktion.

Interpolationsfelet (punktvis)

Om polynomet $p(x)$ av gradtal $\leq n$ interpolerar $f(x)$ i noderna $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, och $x \in [x_0, x_n]$,

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

för något $\xi \in [x_0, x_n]$. (Notera att ξ beror på x).

Maxfelet vid linjär interpolation

Om $p(x)$ är linjär funktion som interpolerar $f(x)$ i noderna a och b gäller

$$\max_{a\leq x\leq b} |f(x) - p(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a\leq \xi\leq b} |f''(\xi)|$$

Fråga 4

$p(x)$ interpolerar e^{-x} i $x = 0, 1, 2$. Vad säger satsen om felet i $x = 1/2$?

1. $\left|e^{-1/2} - p(1/2)\right| \le 1$
2. $\left|e^{-1/2} - p(1/2)\right| \le 1/10$
3. $\left|e^{-1/2} - p(1/2)\right| \le 1/12$
4. $\left|e^{-1/2} - p(1/2)\right| \le 1/16$
5. $\left|e^{-1/2} - p(1/2)\right| \le 1/100$

Fråga 5

$p(x)$ interpolerar e^x linjärt i i $x = 2.5$ och $x = 3$. Vad säger satsen om maxfelet i intervallet $[2.5,\ 3]$?

1. $$\max_{x \in [2.5,3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{16} e^3$$
2. $$\max_{x \in [2.5,3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{16} e^{2.5}$$
3. $$\max_{x \in [2.5,3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{32} e^3$$
4. $$\max_{x \in [2.5,3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{32} e^{2.5}$$
5. $$\max_{x \in [2.5,3]} |p(x) - e^x| \leq \frac{1}{8} e^3$$

Ekvidistant interpolation

Lika långt mellan alla noder i intervallet $[a, b]$

$$x_j = a + jh, \qquad h = (b - a)/n,$$

för n noder. (n antas stort, h litet.)

- Interpolation med högt gradtal på ekvidistanta noder ofta dåligt. Ger stora fel på grund av Runges fenomen (vilda oscillationer i intervallets ändpunkter). Felet $\not\to 0$ när antal punkter n ökar.
- Styckvis polynominterpolation bättre.

Styckvis linjär interpolation

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{a \le \xi \le b} |f''(\xi)|$$

Felet $\to 0$ som $O(h^2)$ när $h \to 0$ ($n \to \infty$).
Noggrannhetsording 2.