Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

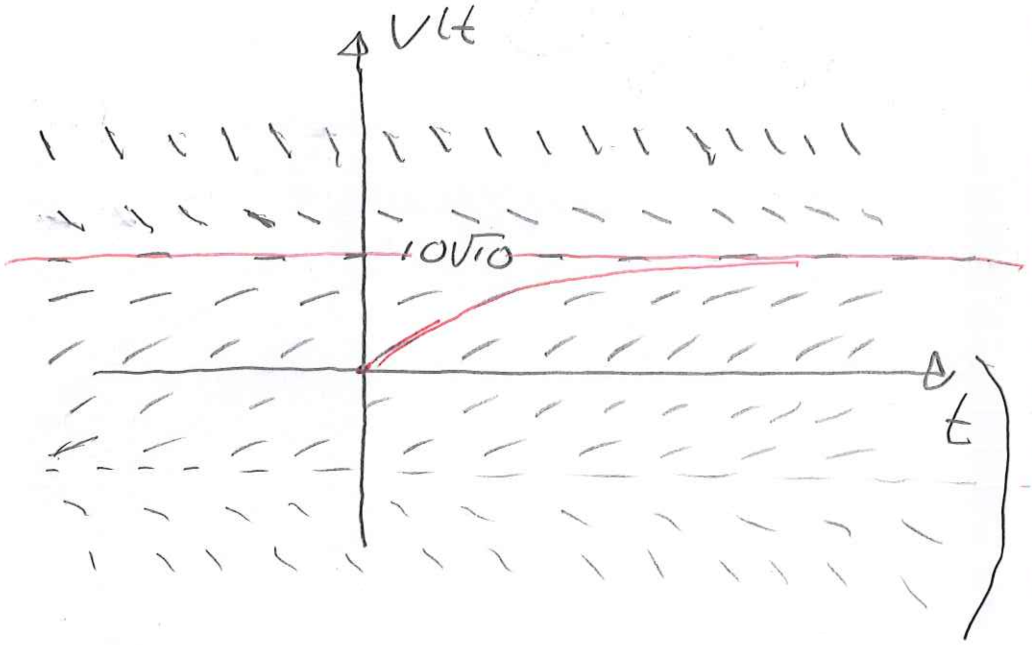
Kontrollskrivning 1 SF1634 V.T.16 12/2

Svar & lösningsförslag

1.

a)

v	dv/dt
	$-$
	$-$
	$-$
$+10\sqrt{10}$	0
	$+$
	$+$
0	$+$
	$+$
$-10\sqrt{10}$	0
	$-$
	$-$
	$-$



$v<0$ ej fysikaliskt relevant

Ovanstående följer av att

$$10-0.1v^{4/3}=0 \iff v^{4/3}=100$$

$$v=100^{3/4}=(\sqrt[4]{100})^3=(\sqrt{10})^3=10\sqrt{10}$$

och

$$10-0.1v^{4/3}>0 \iff |v|<10\sqrt{10}$$

b) Av riktningsfältet framgår att $v(0)=0$

$\Rightarrow$ $v(t)$ är växande, $v(t)<10\sqrt{10}<40$ för alla $t>0$ Svar: NEJ, $v(t)<40$ m/s för alla $t>0$.

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

2. Om $y_2 = u y_1 = x^2 u$ så är

a) $y_2' = 2xu + x^2u'$ och $y_2'' = 2u + 4xu' + x^2u''$.

Om y_2 är en lösning gäller att

$$x^2 y_2'' - 2y_2 = 0 \iff$$

$$x^2(2u + 4xu' + x^2u'') - 2x^2u = 0 \iff$$

$$\underbrace{x^4u'' + 4x^3u'}_{\frac{d}{dx}(x^4u')} = 0 \iff$$

$x^4u' = C_1$, C_1 = konstant.

så $u' = \dfrac{C_1}{x^4} \Rightarrow u = \dfrac{C_1}{x^3} + D$

så $y_2(x) = u y_1 = x^2\left(\dfrac{C_1}{x^3} + D\right) = \left\{\begin{matrix} \text{Tag } C_1 = 1 \\ D = 0 \end{matrix}\right\}$

$= \dfrac{1}{x}$

Eftersom $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{x^2}{\frac{1}{x}} = x^3 \neq$ konstant

är $y_1 = x^2$ och $y_2 = 1/x$ linjärt oberoende

på $(0, \infty)$.

Kontroll: $y_2' = -\dfrac{1}{x^2}$ $y_2'' = \dfrac{2}{x^3}$, så insatt i ekv. fås

$V.L. = x^2 \cdot \dfrac{2}{x^3} - 2\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x} = 0 = H.L.$

SVAR: $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

2 b) Allmän lösning ges enligt a) av

$$y(x) = Ax^2 + B \cdot 1/x$$

med $y'(x) = 2Ax - B/x^2$

Initialvärdena ger

$y(1)=0$: $\begin{cases} A + B = 0 & \Rightarrow A = -B \\ 2A - B = 1 & \Rightarrow A = 1/3,\ B = -1/3 \end{cases}$
$y'(1)=1$:

<u>SVAR</u>: $y(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

(3) Ekvationen är linjär och har konstanta koefficienter. Vi löser först motsvarande homogena ekvation

$$y^{(3)} - 4y' = 0,$$ som har lösning $y = e^{rx}$

OMM r löser den karakteristiska ekvationen $r^3 - 4r = 0$

$$\Leftrightarrow r(r+2)(r-2) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = -2 \vee r = 2.$$

Detta ger tre linjärt oberoende lösningar

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = e^{-2x}, \quad y_3 = e^{2x}.$$

Eftersom ekvationen är av ordning 3 fås

$$y_h = A + Be^{-2x} + Ce^{2x}$$ som allmän homogen lösning.

Vi bestämmer nu en partikulärlösning med ansatsen

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a, \quad y_p''' = 0$$

som ska uppfylla $y_p^{(3)} - 4y_p' = x$, dvs

$$-8ax - 4b = x \Rightarrow a = -1/8, \ b = 0$$

c kan väljas godtyckligt, ta $c = 0$.

SVAR: $y(x) = A + Be^{-2x} + Ce^{2x} - \frac{1}{8}x^2$