SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Elfte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

10 februari 2016

Repetition

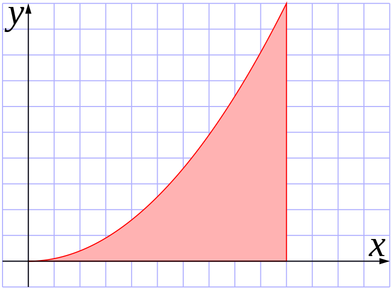
- Lagranges metod använder att gradienterna ∇f och ∇g är parallella vid extrempunkter för $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$.
- Vid två bivillkor

$$\begin{cases} g(x, y) & = & 0 \\ h(x, y) & = & 0 \end{cases}$$

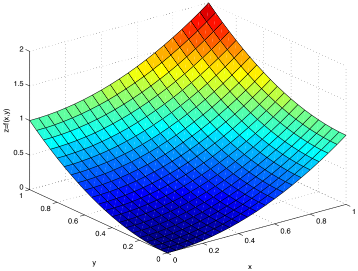
  ska ∇f vara en linjärkombination av ∇g och ∇h.

Integration över en rektangel

- En integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ kan tolkas som arean under en graf.



- En dubbelintegral $\iint_D f(x,y)\,dxdx = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy$ kan tolkas som volymen under en graf.



Integration av konstant

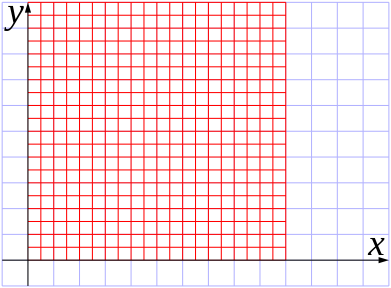
Fråga

Beräkna $\iint_D 2\,dxdy$ *där* D *ges av* $0 \leq x \leq 2$ *och* $1 \leq y \leq 4$.

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4
F. 6
G. 8
H. 12
I. 24

Indelning av området i små delar

För att se att det går att definiera en dubbelintegral kan vi dela in området D i många små rektanglar.



Vi kan jämföra med en funktion $F(x, y)$ som på varje delrektangel D_i ger $\max_{D_i} f(x, y)$ och en funktion $G(x, y)$ som ges av $\min_{D_i} f(x, y)$. Vi får att

$$\iint_D G(x, y)\, dxdy \leq \iint_D f(x, y)\, dxdy \leq \iint_D F(x, y)\, dxdy$$

och både höger- och vänsterled ges av ändliga summor.

Integrerbara funktioner

Definition

Vi säger att $f(x,y)$ är integrerbar på rektangeln D om vi skilladen

$$\iint_D F(x,y)\,dxdy - \iint_D G(x,y)\,dxdy$$

går mot noll när rutnätet blir finmaskigare.

Exempel

Funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ är integrerbar på $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Upprepad integration

Sats

Om f är integrerbar kan beräkna $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ genom *upprepad integration och får*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

om dessa integraler existerar.

Idé.

Rutnätet kan tolkas på två sätt, som en rad av kolonner eller som en kolonn av rader. $\square$

Upprepad integration

Fråga

Använd upprepad integration för att beräkna $\iint_D x^2 y^2 \, dxdy$ *där* D *ges av* $0 \leq x \leq 1$ *och* $1 \leq y \leq 2$

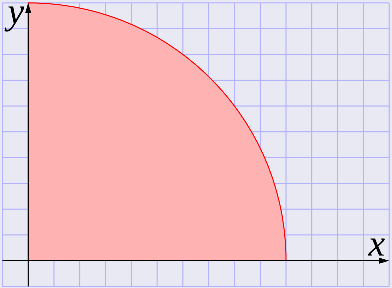
A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{1}{6}$
D. $\frac{1}{9}$
E. $\frac{7}{9}$
F. $\frac{8}{9}$

Andra områden

Det är inte alltid integrationsområdet är en rektangel.

Exempel

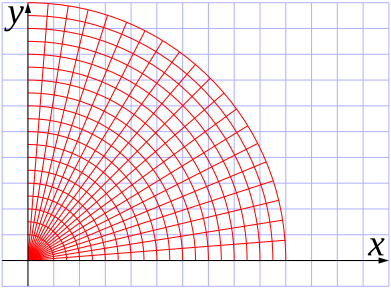
Beräkna $\iint_D x^2 + y^2 \, dxdy$ där D ges av $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 + y^2 \leq 1$.



Vi kan utvidga området till en rektangel, eller dela in området i små delar av annan form är rektanglar.

Polära koordinater

När vi ska integrera över en cirkelsektor kan det vara praktiskt med polära koordinater. Vi får ett rutnät



Här är inte alla rutor lika stora, så vi måste ha med det i beräkningen. Rutornas area är proportionell mot avståndet till origo och vi får

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta.$$

Integration i polära koordinater

Fråga

Beräkna $\iint_D x^2 + y^2 \, dxdy$ *där* D *är kvartscirkeln* $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

E. $\frac{\pi}{8}$

F. $\frac{\pi}{12}$