

# Extremvärden

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

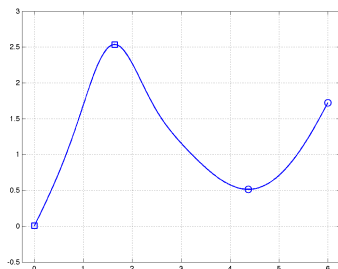
SF1669, VT 2016

# Lokala och globala max/min

Betrakta  $f(\mathbf{x})$  definierad för  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ .

- **Lokalt maximum i  $\mathbf{x}_0$**  när  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  i någon omgivning av  $\mathbf{x}_0$
- **Globalt maximum i  $\mathbf{x}_0$**  när  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

(Analogt för lokalt/global min.)

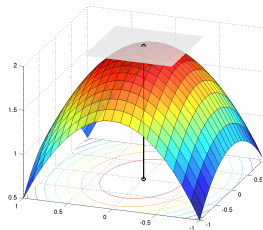


## Sats

Om  $f$  kontinuerlig och  $\mathcal{D}$  kompakt (=sluten och begränsad)  
 $\Rightarrow$  globala max- och min-punkter existerar.

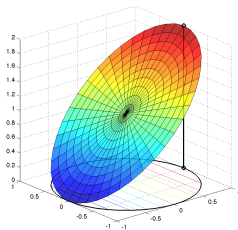
# Nödvändiga villkor för extremvärden

Om  $\mathbf{x}_0$  är lokal extrempunkt till  $f$  i  $\mathcal{D}$  är  $\mathbf{x}_0$  en av följande:



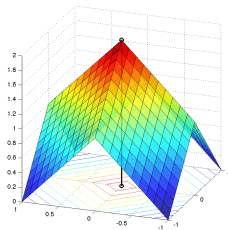
Kritisk punkt

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$



Randpunkt

$$\mathbf{x}_0 \in \partial\mathcal{D}$$



Singulär punkt

$\nabla f(\mathbf{x}_0)$  existerar ej

# Klassificering av kritiska punkter

Antag  $\mathbf{x}_0$  **kritisk punkt** dvs  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  (och  $f$  snäll).

Bilda Hessianen  $\mathbf{H}$ , dvs matrisen av andraderivator, ex

$$f = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Då gäller

- $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  **positivt definit**  $\Rightarrow \mathbf{x}_0$  lokalt **min**  
(dvs alla egenvärden  $> 0$ )
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  **negativt definit**  $\Rightarrow \mathbf{x}_0$  lokalt **max**  
(dvs alla egenvärden  $< 0$ )
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  **indefinit**  $\Rightarrow \mathbf{x}_0$  **sadelpunkt**  
(dvs både positiva och negativa egenvärden)

# Kritiska punkter

Låt

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$$

och  $\mathcal{D}$  vara halvcirkelskivan

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0 \right\}.$$

Vilka är de kritiska punkterna till  $f$  i  $\mathcal{D}$ ?

- 1 (1, 0)
- 2 (1, 0) och (-1, 0)
- 3 (1, 1)
- 4 (1, 1) och (1, -1)
- 5  $(\sqrt{2}, 0)$
- 6  $(\sqrt{2}, 0)$  och  $(-\sqrt{2}, 0)$

Vad är min/max på  $\Gamma_1$ ?

- 1 -1 och 2
- 2 -1 och 1
- 3 0 och 1
- 4 0 och 2
- 5 -2 och 1

Vad är min/max på  $\Gamma_2$ ?

- 1 0 och 2
- 2 0 och 1
- 3  $2 - 2\sqrt{2}$  och 1
- 4  $2 - 2\sqrt{2}$  och 2
- 5 1 och  $2 + 2\sqrt{2}$