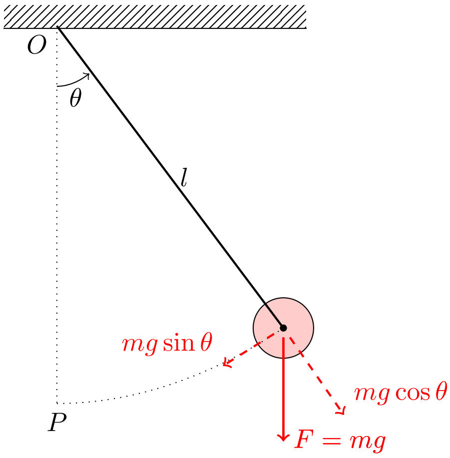
Inlämningsuppgift 1. Pendeln

En pendel bestående av en upphängning av längd l och en massa m svänger i ett plan enligt Figur 1. Om pendelns massa antas vara punktformad och den är upphängd i en oelastisk tråd brukar den betecknas



Figur 1: En pendel av längd l och massa m.

som en matematisk pendel, och dess utslagsvinkel ges då av den icke-linjära differentialekvationen

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \tag{1}$$

där $\theta(t)$ är utslagsvinkeln och g är tyngdaccelerationen[1]. Låt t_1 beteckna tiden då pendeln först passerar OP, det vill säga första tidpunkt för vilken $\theta(t) = 0$.

För uppgift 1-5 gäller begynnelsevillkoren $\theta(0) = \pi/12$ och $\theta'(0) = -1/3$. Konstanten g/l kan sättas till 1.

Uppgift 1. Ekvation (1) kan linjäriseras med hjälp av approximationen $\sin\theta \approx \theta$, vilken är giltig för små vinklar. Lös den linjäriserade ekvationen och bestäm t_1.

Uppgift 2. Taylorutveckling av $\theta(t)$ kring $t = 0$ ger

$$\theta(t) = \theta(0) + \frac{\theta'(0)}{1!}t + \frac{\theta''(0)}{2!}t^2 + \frac{\theta'''(0)}{3!}t^3 + \frac{\theta^{(4)}(0)}{4!}t^4 + \cdots. \tag{2}$$

Genom att derivera (1) med avseende på t, kan uttryck erhållas för högre derivator av θ. För $t = 0$ kan dessa uttryckas i termer av $\theta(0)$ och $\theta'(0)$. Härled en approximation av $\theta(t)$ baserad på de fyra första termerna i Taylorutvecklingen.

Tips: Se exempel 3 i kapitel 4.9 i kursboken.

Uppgift 3. Bestäm t_1 med hjälp av Taylorutvecklingen från uppgift 2. Vad blir resultatet om ni använder två, tre, respektive fyra termer?

Tips: I det sistnämnda fallet är det komplicerat att lösa ekvationen exakt. I MATLAB kan rötterna hittas genom kommandot `roots(p)`, där `p` är ett polynom. Exempel: Polynomet $x^2 - 3x + 2$ lagras i

[1] För härledning, se kapitel 5.3 i kursboken.

MATLAB som vektorn `p=[1 -3 2]`. Notera ordningen av koefficienterna, där högsta term kommer först. Kommandot `roots(p)` ger då resultatet

```
ans =
     2
     1
```

Uppgift 4. Skriv Ekvation (1) som ett första ordningens system. Implementera Eulers metod för detta system och bestäm t_1 numeriskt. Hur avgör ni när $\theta = 0$? Hur väljer ni ert tidssteg?

Tips: Skriv en MATLAB-funktion för högerledet i ert system, antingen som en s k anonym funktion eller som en separat funktionsfil. Exempel: Högerledet för systemet

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ t + y_1 - y_1^2 \end{bmatrix}$$

kan representeras som `F = @(t,y) [y(2); t+y(1)-y(1)^2];` direkt i ett skript (anonym funktion), eller som

```
function yp = F(t,y)
yp(1) = y(2);
yp(2) = t + y(1) - y(1)^2;
```

som sparas som en separat funktionsfil `F.m`. Man bör alltid ha med variabeln `t` i funktionsdefinitionen även om den inte förekommer explicit i högerledet. Med någon av dessa två definitioner kan ett steg med Eulers metod kan skrivas som `y = y + h*F(t,y);` där `h` är tidssteget. Kom ihåg att även uppdatera variabeln `t` i varje tidssteg!

Uppgift 5. Bestäm t_1 numeriskt med hjälp av den inbyggda ODE-lösaren `ode45`.

Tips:

- Se `help ode45` för hjälp om hur denna lösare används. Notera att start- och sluttid för integrationen måste ges. Välj således ett intervall som innehåller första passeringen.
- Om högerledet är givet i en separat funktionsfil `F.m`, måste det betecknas med `@F` vid anropet till `ode45`. För en anonym funktion behövs inget snabel-a.
- För att hitta tidpunkten för $\theta(t) = 0$ kan exempelvis den inbyggda ekvationslösaren `fzero` användas. Denna löser $f(x) = 0$ för en funktion f, och därför krävs det att man skapar en funktion av de diskreta värden för t och θ som erhålls från `ode45`. Detta kan företrädesvis utföras genom interpolation. Exempel:

```
% t och theta antas vara givna vektorer
f = @(x) spline(t,theta,x);   % definierar en funktion f(x) genom att styckvis
                              % interpolera mellan punkterna i vektorerna t och theta

t1 = fzero(f,x0);             % löser ekvationen f(x) = 0, där x0 är en
                              % given startgissning
```

Extrauppgift. Enligt den linjäriserade modellen i uppgift 1 beror periodtiden inte av $\theta(0)$, vilket intuitivt verkar orimligt. Använd `ode45` för att bestämma periodtiden för ett antal startvinklar i intervallet $(0, \pi)$. För denna uppgift kan ni låta $\theta'(0) = 0$.