Ekvationslösning

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2016

Fixpunktiterationer

Nedan ges fyra fixpunktiterationer för ekvationen $x^2 - 5x + 4 = 0$.

1. $x_{n+1} = \frac{x_n^2+4}{5}$
2. $x_{n+1} = 5 - \frac{4}{x_n}$
3. $x_{n+1} = \frac{3x_n^2-10x_n+12}{5}$
4. $x_{n+1} = \frac{x_n^2-4}{2x_n-5}$

Vilka av dem konvergerar mot roten $x^* = 1$?

Vilken konvergerar snabbast?

Fixpunktiterationer

Vi använder fixpunktiterationer för att hitta roten $x^* = 1$ till ekvationen $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Felen $x_n - 1$ blev:

$$
\begin{aligned}
x_0 - 1 &= -0.100000000000000\\
x_1 - 1 &= 0.086000000000000\\
x_2 - 1 &= -0.064362400000000\\
x_3 - 1 &= 0.053975431120256\\
x_4 - 1 &= -0.041432336597434\\
x_5 - 1 &= 0.034175852387501\\
x_6 - 1 &= -0.026639888578154\\
x_7 - 1 &= 0.021737721060597
\end{aligned}
$$

Vilken fixpunktiteration användes?

1. $x_{n+1} = \frac{x_n^2+4}{5}$
2. $x_{n+1} = 5 - \frac{4}{x_n}$
3. $x_{n+1} = \frac{3x_n^2-10x_n+12}{5}$
4. $x_{n+1} = \frac{x_n^2-4}{2x_n-5}$

Linjärisering av vektorvärd funktion

Vad blir linjäriseringen runt punkten $(x, y) = (1, 1)$ av funktionen

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + 3xy^2 \\ e^{x^2 - y^3} - 1 \end{pmatrix} \ ?$$

1. $$\mathbf{L}(x, y) = \begin{pmatrix} -8 + 6x + 6y \\ 2 + x - 3y \end{pmatrix}$$
2. $$\mathbf{L}(x, y) = \begin{pmatrix} -8 + 6x + 6y \\ -5 + 2x + 3y \end{pmatrix}$$
3. $$\mathbf{L}(x, y) = \begin{pmatrix} -8 + 6x + 6y \\ 1 + 2x - 3y \end{pmatrix}$$
4. $$\mathbf{L}(x, y) = \begin{pmatrix} -5 + 6x + 3y \\ 1 + 2x - 3y \end{pmatrix}$$
5. $$\mathbf{L}(x, y) = \begin{pmatrix} -11 + 9x + 6y \\ 1 + 2x - 3y \end{pmatrix}$$
6. $$\mathbf{L}(x, y) = \begin{pmatrix} -12 + 6x + 6y \\ 1 + 2x - 3y \end{pmatrix}$$

Newtons metod för system

I Newtons metod löses ekvationen

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d,$$

med iterationerna

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n)^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n).$$

Alternativ formulering

$$D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n)\delta_n = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n), \qquad \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \delta_n.$$

Exempel

Vi vill lösa systemet

$$\tan(x) - \cos(y/2) = 0,$$
$$\tan(y) + \sin(x/2) = 0.$$

Dvs, här är

$$\boldsymbol{x} = (x, y), \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \tan(x) - \cos(y/2) \\ \tan(y) + \sin(x/2) \end{pmatrix}$$

och Jakobianmatrisen

$$D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(x)} & \frac{1}{2}\sin(y/2) \\ \frac{1}{2}\cos(x/2) & \frac{1}{\cos^2(y)} \end{pmatrix}.$$

Iteration 1

Tag startgissning $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)$ och beräkna $\boldsymbol{x}_1$ via

$$D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\delta_0 = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0), \qquad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \delta_0 = \delta_0.$$

Med

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \tan(x) - \cos(y/2) \\ \tan(y) + \sin(x/2) \end{pmatrix}, \quad D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(x)} & \frac{1}{2}\sin(y/2) \\ \frac{1}{2}\cos(x/2) & \frac{1}{\cos^2(y)} \end{pmatrix},$$

får vi

$$\boldsymbol{F}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D\boldsymbol{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Det ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\delta_0 = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = \delta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Iteration 2

Utgå från $\boldsymbol{x}_1 = (1, -0.5)$ och beräkna $\boldsymbol{x}_2$ via

$$D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{\delta}_1 = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1), \qquad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{\delta}_1.$$

Vi får nu

$$\boldsymbol{F}(1, -0.5) \approx \begin{pmatrix} 0.5885 \\ -0.0669 \end{pmatrix}, \qquad D\boldsymbol{F}(1, -0.5) \approx \begin{pmatrix} 3.4255 & -0.1237 \\ 0.4388 & 1.2984 \end{pmatrix}.$$

Det ger

$$\begin{pmatrix} 3.4255 & -0.1237 \\ 0.4388 & 1.2984 \end{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 = -\begin{pmatrix} 0.5885 \\ -0.0669 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\delta}_1 \approx \begin{pmatrix} -0.1679 \\ 0.1082 \end{pmatrix}$$

och

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{\delta}_1 \approx \begin{pmatrix} 0.8321 \\ -0.3918 \end{pmatrix}.$$

Iterationer 3+

På samma sätt får vi sedan

n	$\boldsymbol{x}_n$	δ_n	$\lvert\delta_n\rvert$
0	0.0000 0.0000	1.0000 -0.5000	1.118033988749895
1	1.0000 -0.5000	-0.1679 0.1082	0.199756575211809
2	0.8321 -0.3918	-0.0519 0.0279	0.058938986250718
3	0.7802 -0.3638	-0.0030 0.0017	0.003469590162057
4	0.7772 -0.3622	-0.0000 0.0000	0.000010472286429
5	0.7772 -0.3622	-0.0000 0.0000	0.000000000093775

Vi avbryter när $|\delta_n|$ tillräckligt litet.

Notera kvadratiska konvergensen.

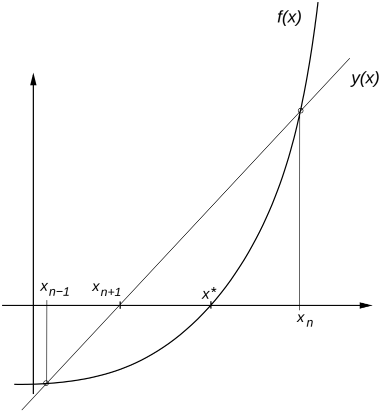
Sekantmetoden

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- Använder både x_n och x_{n-1} för att beräkna x_{n+1}.
- Approximerar derivatan i Newton med

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

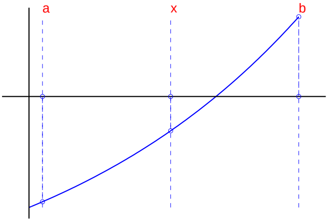
- Konvergensordning $p \approx 1.6$.
- För skalära ekvationer.



Intervallhalveringsmetoden (bisection method)

Starta från intervall $[a, b]$ där $f(a)$ och $f(b)$ olika tecken

1. Gissa på intervallets mittpunkt $x = (a + b)/2$.
2. $f(a)$ och $f(x)$ har olika tecken $\Rightarrow$ byt intervall $[a, b] \mapsto [a, x]$.
3. $f(b)$ och $f(x)$ har olika tecken $\Rightarrow$ byt intervall $[a, b] \mapsto [x, b]$.
4. Upprepa 1-3 till $|b - a|$ tillräckligt litet.



- Robust, a, b kan vara långt från x^*
- Linjär konvergens
- För skalära ekvationer.