SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Sjunde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

2 februari 2016

Repetition

- Gradienten för en funktion $f(x, y)$ är vektorn
$$\mathbf{grad}\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$
- Gradienten ∇f pekar i riktningen där f ökar som mest.
- Gradienten ∇f är vinkelrät mot nivåkurvorna till f.
- Riktningsderivatan av f i riktningen $\mathbf{v}$ ges av
$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$
om $\mathbf{v}$ är en enhetsvektor.

Riktningsderivata

Fråga

Vad är riktningsderivatan för $f(x,y) = x^2y + y^2$ *i punkten* $(1,2)$ *och riktningen* $(-1,1)$*?*

A. $9/\sqrt{2}$

B. $-9/\sqrt{2}$

C. 9

D. -9

E. $1/\sqrt{2}$

F. $-1/\sqrt{2}$

G. 1

H. -1

Egenskap hos gradienten

Från oberoendet av ordningen hos de partiella derivatorna får vi

Sats

Om $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f = (P(x, y), Q(x, y))$ *har kontinuerliga derivator så gäller*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Fråga

Vilka av följande vektorfält kan vara gradient till någon funktion?

A. $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, x + 2y)$
B. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y, x + 2y^2)$
C. $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, x + 2)$
D. $\mathbf{F}(x, y) = (\sin(xy), \cos(yx))$

Jacobianen

Definition

Jacobianen, eller Jacobideterminanten, av $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ges av

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right).$$

Exempel

Vid övergång mellan kartesiska och polära koordinater har vi

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} = r\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = r$$

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \det\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{bmatrix} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}.$$

Jacobian

Fråga

Vad är Jacobianen av $\mathbf{f}(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$*?*

A. e^{x+y}

B. $e^{2x} - e^{2y}$

C. $-2e^{2x}$

D. $e^{x+y} - e^{x-y}$

E. e^{x}

F. e^{y}

Implicita funktioner

Definition

En funktion $\mathbf{f}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definieras implicit om $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ är lösningen till ekvationen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

där $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Exempel

Ekvationen

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

definierar y som en funktion av x i närheten av punkten $(1, 1)$.

Sats

Ekvationen $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ *definierar* $\mathbf{y}$ *som en funktion av* $\mathbf{x}$ *nära* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *om* $\det \mathbf{g}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$.

Implicit funktion

Fråga

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases}$$

definierar en kurva i rummet. Vilket av följande stämmer nära punkten $(1, 1, 2)$*?*

- X *y och z är funktioner av x*
- Y *x och z är funktioner av y*
- Z *x och y är funktioner av z*

A. Inget	B. Bara X	C. Bara Y	D. Bara Z
E. X och Y	F. Y och Z	G. X och Z	H. Alla tre

Implicit derivering

Om $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ är implicit definierad av $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ får vi Jacobimatrisen genom att derivera

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

och kedjeregeln ger att

$$\mathbf{g}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) + \mathbf{g}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

där $\mathbf{g}'(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ delats upp i de två block

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \left[\mathbf{g}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \;\middle|\; \mathbf{g}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right].$$

Sats

Om $\mathbf{g}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ är inverterbar är

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\left[\mathbf{g}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right]^{-1} \mathbf{g}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Implicit derivering

Fråga

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases}$$

definierar en kurva i rummet. Vilket av följande stämmer nära punkten $(1, 1, 2)$*?*

A. $\mathbf{r}'(x) = (1, -1, 0)$
B. $\mathbf{r}'(x) = (-1, 1, 0)$
C. $\mathbf{r}'(x) = (-1, 1, 1)$
D. $\mathbf{r}'(x) = (1, -1, 1)$