# SF1669 Matematisk och numerisk analys II

## Sjätte föreläsningen


Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH


28 januari 2016

# Repetition

- Kedjeregeln säger att Jacobimatrisen av sammansättningen $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ är produkten av Jacobimatriserna

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(x, y) = (D\mathbf{f}(\mathbf{g}(x, y)))(D\mathbf{g}(x, y)).$$

- Speciellt, om $g$ är ett variabelybyte i två variabler, $(u, v) = \mathbf{g}(x, y)$, säger kedjeregeln att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

# Exempel från tentamen

## Uppgift (från tentamen 2015-01-12)

De två vektorvärda funktionerna **f** och **g** ges av

$$\mathbf{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y) \quad \text{och} \quad \mathbf{g}(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$$

för alla $(x, y)$ i $\mathbb{R}^2$.

A. Beräkna Jacobimatriserna $D\mathbf{f}(x, y)$ och $D\mathbf{g}(x, y)$. **(2)**

B. Jacobimatrisen för sammansättningen $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ kan fås genom en matrismultiplikation. Illustrera detta genom att beräkna Jacobimatrisen $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(x, y)$. **(2)**

# Repetition

- Linjär approximation, eller linjarisering, ges av

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx F(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

- Vid felanalys får vi

$$\epsilon_z \approx \epsilon_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \epsilon_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

om $z = f(x, y)$ med felgränser

$$E_z \approx E_x \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + E_y \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

# Exempel från tentamen

**Uppgift (från tentamen 2015-01-12)**

Använd en linjarisering kring punkten $(x_0\,,y_0) = (1\,,2)$ för att approximera värdet av funktionen $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ i punkten $(1{,}2\;,\;2{,}1)$. **(4)**

# Gradient

## Definition

Gradienten till en differentierbar funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ i punkten $\mathbf{a}$ är vektorn

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Symbolen $\nabla$ kallas nabla.

## Obs!

Den linjära approximationen kring $\mathbf{a}$ kan skrivas

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

eller

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}.$$

# Vektorfält

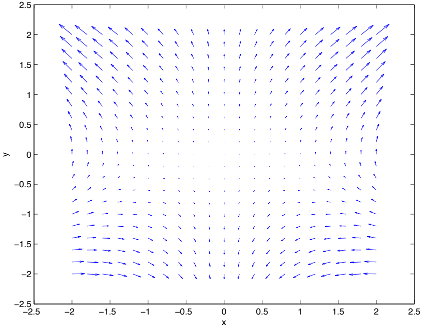
Gradienten till $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ger ett vektorfält i $\mathbb{R}^n$, dvs en funktion $\nabla f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

## Exempel

$$f(x,y) = x^2y + y^2$$

ger

$$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2+2y).$$




## Obs!

I Matlab kan man se på vektorfält med `quiver`.

# Riktningsderivata

## Definition

Riktningsderivatan av $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ i riktningen $\mathbf{v}$ i punkten $\mathbf{a}$ ges av

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$$

om $|\mathbf{v}| = 1$.

## Sats

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

*om* $|\mathbf{v}| = 1$ *och* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ *är differentierbar.*

- $\nabla f(\mathbf{a})$ pekar åt det håll där riktningsderivatan är största.
- riktningsderivatan är noll ortogonalt mot $\nabla f(\mathbf{a})$

# Riktningsderivata

## Fråga

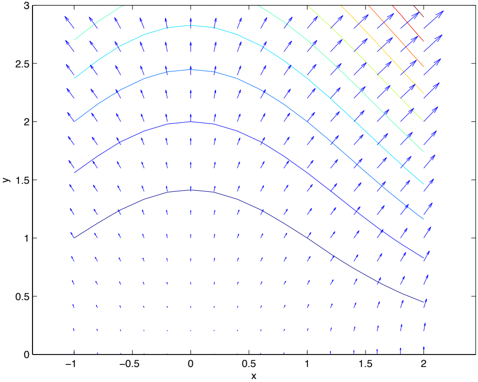
*Vad är riktningsderivatan för* $f(x, y) = x^2y + y^2$ *i punkten* $(1, 2)$ *och riktningen* $(-1, 1)$*?*

A. $9/\sqrt{2}$
B. $-9/\sqrt{2}$
C. $9$
D. $-9$
E. $1/\sqrt{2}$
F. $-1/\sqrt{2}$
G. $1$
H. $-1$

# Gradienten och nivåkurvor

**Sats**

*Om $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar är $\nabla f(x)$ ortogonal mot nivåkurvorna till $f$.*




Figur : Gradient och nivåkurvor för $f(x,y) = x^2y + y^2$

# Egenskap hos gradienten

Från oberoendet av ordningen hos de partiella derivatorna får vi

## Sats

*Om $F(x, y) = \nabla f = (P(x, y), Q(x, y))$ har kontinuerliga derivator så gäller*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

## Fråga

*Vilka av följande vektorfält kan vara gradient till någon funktion?*

A. $F(x, y) = (2x + y, x + 2y)$
B. $F(x, y) = (2xy + y, x + 2y^2)$
C. $F(x, y) = (2x + y, x + 2)$
D. $F(x, y) = (\sin(xy), \cos(yx))$