KTH Engineering Sciences

Anteckningar föreläsning 5

Nedan finns den delen av fel- och störningsanalysen jag inte hann med på föreläsningen 2016-01-27. Materialet finns också beskrivet (lite annorlunda) i anteckningarna (A1) som ni hittar på kurshemsidan.

1 Analys av felfortplantning

När F är differentierbar och ε_x litet ges felfortplantningen genom att approximera F med sin linjärisering runt approximationen $\tilde{x}$.

1.1 En dimension (envariabel-fallet)

I en dimension är linjäriseringen runt $\tilde{x}$ tangentlinjen till $F(x)$ vid $x = \tilde{x}$,

$$L(x) = F(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})F'(\tilde{x}) \qquad \approx F(x) \text{ när } x \approx \tilde{x}.$$

Felet i utdata ges då approximativt av

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \tilde{y} - y = F(\tilde{x}) - F(x) \approx L(\tilde{x}) - L(x) \\ &= \big(F(\tilde{x}) + (\tilde{x} - \tilde{x})F'(\tilde{x})\big) - \big(F(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})F'(\tilde{x})\big) \\ &= F(\tilde{x}) - \big(F(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})F'(\tilde{x})\big) = (\tilde{x} - x)F'(\tilde{x}) = \varepsilon_x F'(\tilde{x}) \end{aligned}$$

I en dimension får vi alltså en relation mellan indata-fel och utdata-fel enligt

$$\boxed{\varepsilon_y \approx \varepsilon_x |F'(\tilde{x})|.}$$

Från linjäriseringen kan vi också se hur felgränserna beror på varandra. Eftersom $x = \tilde{x} + \varepsilon_x$ har vi att

$$\begin{aligned} E_y &= \max_{-E_x \le \varepsilon_x \le E_x} |F(\tilde{x}) - F(\tilde{x} + \varepsilon_x)| \approx \max_{-E_x \le \varepsilon_x \le E_x} |L(\tilde{x}) - L(\tilde{x} + \varepsilon_x)| = \max_{-E_x \le \varepsilon_x \le E_x} |\varepsilon_x F'(\tilde{x})| \\ &= E_x |F'(\tilde{x})|, \end{aligned}$$

dvs

$$\boxed{E_y \approx E_x |F'(\tilde{x})|.}$$

1.2 Två dimensioner

Vi betraktar nu funktionen $y = F(x_1, x_2)$. Approximationen av x_1, x_2 och felen betecknas

$$\tilde{x}_1 \approx x_1, \qquad \tilde{x}_2 \approx x_2, \qquad \varepsilon_{x_1} = \tilde{x}_1 - x_1, \qquad \varepsilon_{x_2} = \tilde{x}_2 - x_2.$$

I två dimensioner är linjäriseringen runt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ tangentplanet till $F(x)$ vid $(x_1, x_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$,

$$L(x_1, x_2) = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (x_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (x_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2).$$

När $(x_1, x_2) \approx (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ (dvs små ε_{x_1} och ε_{x_2}) är approximation $L(x_1, x_2) \approx F(x_1, x_2)$ bra och vi kan approximera felet i utdata enligt

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_y = \tilde{y} - y = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - F(x_1, x_2) &\approx L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - L(x_1, x_2) \\
&= (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) \\
&\quad - (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (x_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (x_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) \\
&= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (x_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (x_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) \\
&= (\tilde{x}_1 - x_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_2 - x_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \\
&= \varepsilon_{x_1}F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \varepsilon_{x_2}F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2).
\end{aligned}
$$

Relationen mellan indata-fel och utdata-fel blir därför i två dimensioner

$$\boxed{\varepsilon_y \approx \varepsilon_{x_1}F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \ \varepsilon_{x_2}F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2).}$$

Om vi har givna felgränser för ε_{x_1} och ε_{x_2},

$$|\varepsilon_{x_1}| \leq E_{x_1}, \qquad |\varepsilon_{x_2}| \leq E_{x_2},$$

kan vi liksom i en dimension även få en relation för dessa. Med hjälp av beräkningarna ovan får vi

$$
\begin{aligned}
E_y &= \max_{\substack{-E_{x_1} \leq \varepsilon_{x_1} \leq E_{x_1} \\ -E_{x_2} \leq \varepsilon_{x_2} \leq E_{x_2}}} |F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - F(\tilde{x}_1 + \varepsilon_{x_1}, \tilde{x}_2 + \varepsilon_{x_1})| \\
&\approx \max_{\substack{-E_{x_1} \leq \varepsilon_{x_1} \leq E_{x_1} \\ -E_{x_2} \leq \varepsilon_{x_2} \leq E_{x_2}}} |L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - L(\tilde{x}_1 + \varepsilon_{x_1}, \tilde{x}_2 + \varepsilon_{x_1})| \\
&= \max_{\substack{-E_{x_1} \leq \varepsilon_{x_1} \leq E_{x_1} \\ -E_{x_2} \leq \varepsilon_{x_2} \leq E_{x_2}}} |\varepsilon_{x_1}F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \ \varepsilon_{x_2}F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| \\
&= E_{x_1}\,|F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| + E_{x_2}\,|F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|.
\end{aligned}
$$

Sammanfattningsvis får vi

$$\boxed{E_y \approx E_{x_1}|F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| + \ E_{x_2}|F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|.}$$

Exempel 1: Låt $x = 1 \pm 0.1$, $y = 2 \pm 0.5$ och $z = \sqrt{1 + x^2 + y}$. Vad är felgränsen i z?

Här är $\tilde{x} = 1$, $E_x = 0.1$, $\tilde{y} = 2$ och $E_y = 0.5$. Vi använder formeln för felgränserna i två variabler ovan.

$$
\begin{aligned}
E_z &\approx E_x \left|\frac{\partial z(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x}\right| + E_y \left|\frac{\partial z(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y}\right| = E_x \left|\frac{2\tilde{x}}{2\sqrt{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}}}\right| + E_y \left|\frac{1}{2\sqrt{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}}}\right| \\
&= E_x\frac{1}{2} + E_y\frac{1}{4} = 0.1\frac{1}{2} + 0.5\frac{1}{4} = 0.05 + 0.125 = 0.175.
\end{aligned}
$$

1.3 Kommentarer

- De allmänna felfortplantningsformlerna för funktioner av flera variabler $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ är

$$\boxed{\varepsilon_y \approx \varepsilon_{x_1}\frac{\partial F(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_1} + \cdots + \varepsilon_{x_n}\frac{\partial F(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_n},}$$

och

$$\boxed{E_y \approx E_{x_1} \left|\frac{\partial F(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)}{\partial x_1}\right| + \cdots + E_{x_n} \left|\frac{\partial F(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)}{\partial x_n}\right|}.$$

(Notationen för felen och felgränserna är här $\varepsilon_{x_j} = \tilde{x}_j - x_j$ och $|\varepsilon_{x_j}| \leq E_{x_j}$.)

- Felen ε_x, ε_{x_1}, ε_{x_2}, etc. skrivs ibland dx, dx_1, dx_2 etc. och kallas då *differentialer*. Med denna notation blir felfortplantningsformeln i två variabler

$$\tilde{y} - y = \varepsilon_y \approx dy := F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)dx_1 + F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)dx_2.$$

Notera att dy här *definieras* som uttrycket i högerledet.

1.4 Experimentell störningsanalys

I många fall är en sluten form för F inte känd, eller för komplicerad för att kunna deriveras. I denna situation är det mer praktiskt att använda "experimentell" störningsanalys, enligt följande. Vi antar att $x_1 = \tilde{x}_1 \pm E_{x_1}$ och $x_1 = \tilde{x}_2 \pm E_{x_2}$ är givet. Vi vill hitta felgränsen E_y i $y = F(x_1, x_2)$.

1. Beräkna $\tilde{y} = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.
2. Stör x-variablerna en i sänder med sin felgräns och beräkna motsvarande störda y-värden:
$$\tilde{y}_1 = F(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2),$$
$$\tilde{y}_2 = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + E_{x_2}).$$
3. Uppskatta E_y som
$$E_y \approx |\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}|.$$

Vi noterar att denna metod inte involverar någon derivering. Allt man behöver göra är att evaluera F tre gånger. Om F representerar ett problem som ska lösas betyder det att vi måste lösa problemet tre gånger.

Varför ger proceduren en bra approximation av E_y?

Approximera $F(x_1, x_2) \approx L(x_1, x_2)$ som tidigare och betrakta första termen i uppskattningen:

$$\begin{aligned}
|\tilde{y} - \tilde{y}_1| &= |F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - F(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2)| \approx |L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - L(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2)| \\
&= |F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \\
&\quad - (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_1 + E_{x_1} - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))| \\
&= |F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + E_{x_1}F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))| \\
&= E_{x_1} \left|F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\right|.
\end{aligned}$$

På exakt samma sätt får vi att

$$|\tilde{y} - \tilde{y}_2| \approx E_{x_2} \left|F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\right|.$$

Tillsammans har vi alltså att

$$|\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}| \approx E_{x_1} \left|F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\right| + E_{x_2} \left|F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\right|$$

vilket är högerledet i den tidigare härledda felfortplantningsformeln, dvs $\approx E_y$.

Exempel 2: Lös uppgiften i Exempel 1 med experimentell störningsräkning.

Låt $F(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2}$. Vi beräknar

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = F(1, 2) = 2, \\ \tilde{y}_1 &= F(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2) = F(1.1, 2) \approx 2.0518, \\ \tilde{y}_2 &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + E_{x_2}) = F(1, 2.5) \approx 2.1213. \end{aligned}$$

Felgränsen uppskattas som

$$E_y \approx |\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}| = |2 - 2.0518\dots| + |2 - 2.1213\dots| = 0.0518\dots + 0.1213\dots \approx 0.173.$$

- Proceduren kan lätt generaliseras till funktioner av fler variabler. Om $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ och $x_j = \tilde{x}_j \pm E_{x_j}$ gör vi

  1. Beräkna $\tilde{y} = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$.
  2. Stör x-variablerna en i sänder med sin felgräns och beräkna motsvarande störda y-värden:

  $$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= F(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n), \\ \tilde{y}_2 &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + E_{x_2}, \dots, \tilde{x}_n), \\ &\vdots \\ \tilde{y}_n &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n + E_{x_n}), \end{aligned}$$

  3. Uppskatta E_y som

  $$E_y \approx |\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}| + \cdots + |\tilde{y}_n - \tilde{y}|.$$

  Se anteckningarna (A1) för ytterligare kommentarer om experimentell störningsanalys.