

Kedjeregeln och linjärisering

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2016

- Givet $f(x, y)$, $x(t)$ och $y(t)$,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

- Givet $f(x, y)$, $x(s, t)$ och $y(s, t)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}\end{aligned}$$

- Givet $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Om $\mathbf{z}(\mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{s}))$,

$$D\mathbf{z} = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{s}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{s})) D\mathbf{g}(\mathbf{s}).$$

Linjärisering

1-D

Linjärisering av $f(x)$ runt a är tangentlinjen

$$L(x) = f(a) + (x - a)f'(a).$$

När $x \approx a$ är $f(x) \approx L(x)$.

2-D

Linjärisering av $f(x, y)$ runt (a, b) är tangentplanet

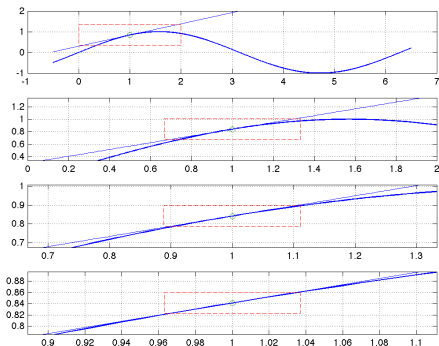
$$L(x, y) = f(a, b) + (x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b).$$

När $(x, y) \approx (a, b)$ är $f(x, y) \approx L(x, y)$.

n-D

Linjärisering av $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ runt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ är

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$



Fel- och störningsanalys

Låt \tilde{x} vara en approximation av x .

- Absoluta felet: $\varepsilon_x = \tilde{x} - x$
- Relativa felet: $r_x = (\tilde{x} - x)/x$
- Om vi vet att $|\varepsilon_x| \leq E_x$ kallas E_x felgränsen till \tilde{x} och vi skriver $x = \tilde{x} \pm E_x$.

Antag att

$$y = F(x) \quad \text{och} \quad \tilde{y} = F(\tilde{x}).$$

Felfortplantning: Hur fel i utdata \tilde{y} beror på fel i indata \tilde{x} .

I en dimension gäller:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &\approx \varepsilon_x |F'(\tilde{x})|, \\ E_y &\approx E_x |F'(\tilde{x})|.\end{aligned}$$

I två dimensioner gäller:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &\approx \varepsilon_{x_1} F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \varepsilon_{x_2} F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \\ E_y &\approx E_{x_1} |F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| + E_{x_2} |F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|.\end{aligned}$$

Givet $f(u, v)$ och $g(s, t) = f(u(s, t), s)$. Vad blir

$$g_s(s, t) + g_t(s, t) ?$$

1 $f_u(u(s, t), s) \left(u_s(s, t) + u_t(s, t) \right) + f_v(u(s, t), s) s$

2 $f_u(u(s, t), s) u_s(s, t)$

3 $f_u(u(s, t), s) \left(u_s(s, t) + u_t(s, t) \right)$

4 $f_u(u(s, t), s) \left(u_s(s, t) + u_t(s, t) \right) + f_v(u(s, t), s)$

5 $f_u(u(s, t), s) \left(u_s(s, t) + u_t(s, t) \right) + f_v(u(s, t), s) (s + t)$

Låt

$$f(x, y) = \sin(xy).$$

Approximera $f(1.01, 3.1)$ genom att linjärisera f runt $(1, \pi)$. Svaret blir (med en siffras noggrannhet):

- 1 -0.02
- 2 -0.01
- 3 0.01
- 4 0.02
- 5 0.03

Antag att kateterna a , b i en rätvinklig triangel är givna som $a = 3 \pm 0.02$ och $b = 4 \pm 0.01$. Vad blir osäkerheten (felgränsen) i triangelns hypotenus?

- 1 0.01
- 2 0.02
- 3 0.03
- 4 0.04
- 5 0.05
- 6 0.06