



Anteckningar föreläsning 5

Nedan finns den delen av fel- och störningsanalysen jag inte hann med på föreläsningen 2015-01-27. Materialet finns också beskrivet (lite annorlunda) i anteckningarna (A1) som ni hittar på kurshemsidan.

1 Analys av felfortplantning

När F är differentierbar och ε_x litet ges felfortplantningen genom att approximera F med sin linjärisering runt approximationen \tilde{x} .

1.1 En dimension (envariabel-fallet)

I en dimension är linjäriseringen runt \tilde{x} tangentlinjen till $F(x)$ vid $x = \tilde{x}$,

$$L(x) = F(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})F'(\tilde{x}) \approx F(x) \text{ när } x \approx \tilde{x}.$$

Felet i utdata ges då approximativt av

$$\begin{aligned} \varepsilon_y = \tilde{y} - y &= F(\tilde{x}) - F(x) \approx L(\tilde{x}) - L(x) \\ &= (F(\tilde{x}) + (\tilde{x} - \tilde{x})F'(\tilde{x})) - (F(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})F'(\tilde{x})) \\ &= F(\tilde{x}) - (F(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})F'(\tilde{x})) = (\tilde{x} - x)F'(\tilde{x}) = \varepsilon_x F'(\tilde{x}) \end{aligned}$$

I en dimension får vi alltså en relation mellan indata-fel och utdata-fel enligt

$$\boxed{\varepsilon_y \approx \varepsilon_x |F'(\tilde{x})|}.$$

Från linjäriseringen kan vi också se hur felgränserna beror på varandra. Eftersom $x = \tilde{x} + \varepsilon_x$ har vi att

$$\begin{aligned} E_y &= \max_{-E_x \leq \varepsilon_x \leq E_x} |F(\tilde{x}) - F(\tilde{x} + \varepsilon_x)| \approx \max_{-E_x \leq \varepsilon_x \leq E_x} |L(\tilde{x}) - L(\tilde{x} + \varepsilon_x)| = \max_{-E_x \leq \varepsilon_x \leq E_x} |\varepsilon_x F'(\tilde{x})| \\ &= E_x |F'(\tilde{x})|, \end{aligned}$$

dvs

$$\boxed{E_y \approx E_x |F'(\tilde{x})|}.$$

1.2 Två dimensioner

Vi betraktar nu funktionen $y = F(x_1, x_2)$. Approximationen av x_1, x_2 och felen betecknas

$$\tilde{x}_1 \approx x_1, \quad \tilde{x}_2 \approx x_2, \quad \varepsilon_{x_1} = \tilde{x}_1 - x_1, \quad \varepsilon_{x_2} = \tilde{x}_2 - x_2.$$

I två dimensioner är linjäriseringen runt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ tangentplanet till $F(x)$ vid $(x_1, x_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$,

$$L(x_1, x_2) = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (x_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (x_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2).$$

När $(x_1, x_2) \approx (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ (dvs små ε_{x_1} och ε_{x_2}) är approximation $L(x_1, x_2) \approx F(x_1, x_2)$ bra och vi kan approximera felet i utdata enligt

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \tilde{y} - y = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - F(x_1, x_2) \approx L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - L(x_1, x_2) \\ &= (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_1 - x_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_2 - x_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) \\ &\quad - (F(x_1, x_2) + (x_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(x_1, x_2) + (x_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(x_1, x_2)) \\ &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - (F(x_1, x_2) + (x_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(x_1, x_2) + (x_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(x_1, x_2)) \\ &= (\tilde{x}_1 - x_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_2 - x_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \\ &= \varepsilon_{x_1}F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \varepsilon_{x_2}F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2). \end{aligned}$$

Relationen mellan indata-fel och utdata-fel blir därför i två dimensioner

$$\boxed{\varepsilon_y \approx \varepsilon_{x_1}F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \varepsilon_{x_2}F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2).}$$

Om vi har givna felgränser för ε_{x_1} och ε_{x_2} ,

$$|\varepsilon_{x_1}| \leq E_{x_1}, \quad |\varepsilon_{x_2}| \leq E_{x_2},$$

kan vi liksom i en dimension även få en relation för dessa. Med hjälp av beräkningarna ovan får vi

$$\begin{aligned} E_y &= \max_{\substack{-E_{x_1} \leq \varepsilon_{x_1} \leq E_{x_1} \\ -E_{x_2} \leq \varepsilon_{x_2} \leq E_{x_2}}} |F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - F(\tilde{x}_1 + \varepsilon_{x_1}, \tilde{x}_2 + \varepsilon_{x_2})| \\ &\approx \max_{\substack{-E_{x_1} \leq \varepsilon_{x_1} \leq E_{x_1} \\ -E_{x_2} \leq \varepsilon_{x_2} \leq E_{x_2}}} |L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - L(\tilde{x}_1 + \varepsilon_{x_1}, \tilde{x}_2 + \varepsilon_{x_2})| \\ &= \max_{\substack{-E_{x_1} \leq \varepsilon_{x_1} \leq E_{x_1} \\ -E_{x_2} \leq \varepsilon_{x_2} \leq E_{x_2}}} |\varepsilon_{x_1}F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \varepsilon_{x_2}F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| \\ &= E_{x_1}|F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| + E_{x_2}|F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|. \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis får vi

$$\boxed{E_y \approx E_{x_1}|F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| + E_{x_2}|F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|.}$$

Exempel 1: Låt $x = 1 \pm 0.1$, $y = 2 \pm 0.5$ och $z = \sqrt{1 + x^2 + y}$. Vad är felgränsen i z ?

Här är $\tilde{x} = 1$, $E_x = 0.1$, $\tilde{y} = 2$ och $E_y = 0.5$. Vi använder formeln för felgränserna i två variabler ovan.

$$\begin{aligned} E_z &\approx E_x \left| \frac{\partial z(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} \right| + E_y \left| \frac{\partial z(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} \right| = E_x \left| \frac{2\tilde{x}}{2\sqrt{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}}} \right| + E_y \left| \frac{1}{2\sqrt{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}}} \right| \\ &= E_x \frac{1}{2} + E_y \frac{1}{4} = 0.1 \frac{1}{2} + 0.5 \frac{1}{4} = 0.05 + 0.125 = 0.175. \end{aligned}$$

1.3 Kommentarer

- De allmänna felfortplantningsformlerna för funktioner av flera variabler $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är

$$\boxed{\varepsilon_y \approx \varepsilon_{x_1} \frac{\partial F(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)}{\partial x_1} + \dots + \varepsilon_{x_n} \frac{\partial F(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)}{\partial x_n},}$$

och

$$E_y \approx E_{x_1} \left| \frac{\partial F(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)}{\partial x_1} \right| + \dots + E_{x_n} \left| \frac{\partial F(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)}{\partial x_n} \right|.$$

(Notationen för felen och felgränserna är här $\varepsilon_{x_j} = \tilde{x}_j - x_j$ och $|\varepsilon_{x_j}| \leq E_{x_j}$.)

- Felen $\varepsilon_x, \varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}$, etc. skrivs ibland dx, dx_1, dx_2 etc. och kallas då *differentials*. Med denna notation blir felfortplantningsformeln i två variabler

$$\tilde{y} - y = \varepsilon_y \approx dy := F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)dx_1 + F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)dx_2.$$

Notera att dy här *definieras* som uttrycket i högerledet.

1.4 Experimentell störningsanalys

I många fall är en sluten form för F inte känd, eller för komplicerad för att kunna deriveras. I denna situation är det mer praktiskt att använda "experimentell" störningsanalys, enligt följande. Vi antar att $x_1 = \tilde{x}_1 \pm E_{x_1}$ och $x_2 = \tilde{x}_2 \pm E_{x_2}$ är givet. Vi vill hitta felgränsen E_y i $y = F(x_1, x_2)$.

1. Beräkna $\tilde{y} = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.
2. Stör x -variablerna en i sänder med sin felgräns och beräkna motsvarande störda y -värden:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= F(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2), \\ \tilde{y}_2 &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + E_{x_2}).\end{aligned}$$

3. Uppskatta E_y som

$$E_y \approx |\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}|.$$

Vi noterar att denna metod inte involverar någon derivering. Allt man behöver göra är att evaluera F tre gånger. Om F representerar ett problem som ska lösas betyder det att vi måste lösa problemet tre gånger.

Varför ger proceduren en bra approximation av E_y ?

Approximera $F(x_1, x_2) \approx L(x_1, x_2)$ som tidigare och betrakta första termen i uppskattningen:

$$\begin{aligned}|\tilde{y} - \tilde{y}_1| &= |F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - F(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2)| \approx |L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - L(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2)| \\ &= |F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \\ &\quad - (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_1 + E_{x_1} - \tilde{x}_1)F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2)F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))| \\ &= |F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + E_{x_1}F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))| \\ &= E_{x_1} |F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|.\end{aligned}$$

På exakt samma sätt får vi att

$$|\tilde{y} - \tilde{y}_2| \approx E_{x_2} |F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|.$$

Tillsammans har vi alltså att

$$|\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}| \approx E_{x_1} |F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| + E_{x_2} |F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|$$

vilket är högerledet i den tidigare härledda felfortplantningsformeln, dvs $\approx E_y$.

Exempel 2: Lös uppgiften i Exempel 1 med experimentell störningsräkning.

Låt $F(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2}$. Vi beräknar

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = F(1, 2) = 2, \\ \tilde{y}_1 &= F(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2) = F(1.1, 2) \approx 2.0518, \\ \tilde{y}_2 &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + E_{x_2}) = F(1, 2.5) \approx 2.1213.\end{aligned}$$

Felgränsen uppskattas som

$$E_y \approx |\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}| = |2 - 2.0518\dots| + |2 - 2.1213\dots| = 0.0518\dots + 0.1213\dots \approx 0.173.$$

- Proceduren kan lätt generaliseras till funktioner av fler variabler. Om $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ och $x_j = \tilde{x}_j \pm E_{x_j}$ gör vi

1. Beräkna $\tilde{y} = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$.
2. Stör x -variablerna en i sänder med sin felgräns och beräkna motsvarande störda y -värden:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= F(\tilde{x}_1 + E_{x_1}, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n), \\ \tilde{y}_2 &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + E_{x_2}, \dots, \tilde{x}_n), \\ &\vdots \\ \tilde{y}_n &= F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n + E_{x_n}),\end{aligned}$$

3. Uppskatta E_y som

$$E_y \approx |\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}| + \dots + |\tilde{y}_n - \tilde{y}|.$$

Se anteckningarna (A1) för ytterligare kommentarer om experimentell störningsanalys.