Kedjeregeln och linjärisering

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2016

Kedjeregeln

- Givet $f(x, y)$, $x(t)$ och $y(t)$,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- Givet $f(x, y)$, $x(s, t)$ och $y(s, t)$,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

- Givet $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Om $\mathbf{z}(\mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{s}))$,

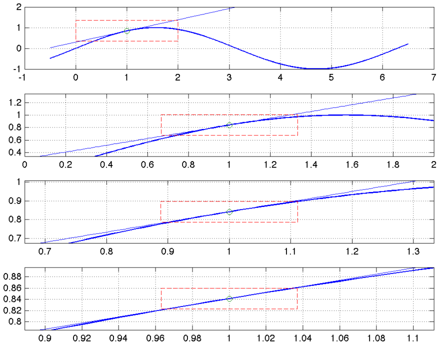
$$D\mathbf{z} = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{s}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{s}))\, D\mathbf{g}(\mathbf{s}).$$

Linjärisering

1-D
Linjärisering av $f(x)$ runt a är tangentlinjen

$$L(x) = f(a) + (x - a)f'(a).$$

När $x \approx a$ är $f(x) \approx L(x)$.



2-D
Linjärisering av $f(x, y)$ runt (a, b) är tangentplanet

$$L(x, y) = f(a, b) + (x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b).$$

När $(x, y) \approx (a, b)$ är $f(x, y) \approx L(x, y)$.

n-D
Linjärisering av $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ runt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ är

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Fel- och störningsanalys

Låt $\tilde{x}$ vara en approximation av x.

- Absoluta felet: $\varepsilon_x = \tilde{x} - x$
- Relativa felet: $r_x = (\tilde{x} - x)/x$
- Om vi vet att $|\varepsilon_x| \leq E_x$ kalas E_x felgränsen till $\tilde{x}$ och vi skriver $x = \tilde{x} \pm E_x$.

Antag att

$$y = F(x) \quad \text{och} \quad \tilde{y} = F(\tilde{x}).$$

Felfortplantning: Hur fel i utdata $\tilde{y}$ beror på fel i indata $\tilde{x}$.
I en dimension gäller:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &\approx \varepsilon_x |F'(\tilde{x})|, \\ E_y &\approx E_x |F'(\tilde{x})|. \end{aligned}$$

I två dimensioner gäller:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &\approx \varepsilon_{x_1} F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \ \varepsilon_{x_2} F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \\ E_y &\approx E_{x_1} |F_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| + \ E_{x_2} |F_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)|. \end{aligned}$$

Kedjeregeln

Givet $f(u, v)$ och $g(s, t) = f(u(s, t), s)$. Vad blir

$$g_s(s, t) + g_t(s, t) \quad ?$$

1. $$f_u(u(s, t), s)\Big(u_s(s, t) + u_t(s, t)\Big) + f_v(u(s, t), s)s$$
2. $$f_u(u(s, t), s)u_s(s, t)$$
3. $$f_u(u(s, t), s)\Big(u_s(s, t) + u_t(s, t)\Big)$$
4. $$f_u(u(s, t), s)\Big(u_s(s, t) + u_t(s, t)\Big) + f_v(u(s, t), s)$$
5. $$f_u(u(s, t), s)\Big(u_s(s, t) + u_t(s, t)\Big) + f_v(u(s, t), s)\Big(s + t\Big)$$

Linjärisering

Låt

$$f(x, y) = \sin(xy).$$

Approximera $f(1.01, 3.1)$ genom att linjärisera f runt $(1, \pi)$. Svaret blir (med en siffras noggrannhet):

1. -0.02
2. -0.01
3. 0.01
4. 0.02
5. 0.03

Felanalys

Antag att kateterna a, b i en rätvinklig triangel är givna som $a = 3 \pm 0.02$ och $b = 4 \pm 0.01$. Vad blir osäkerheten (felgränsen) i triangelns hypotenusa?

1. 0.01
2. 0.02
3. 0.03
4. 0.04
5. 0.05
6. 0.06