

# Partiella derivator

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2016

- Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

- Partiell derivering: Derivera i en variabel med övriga variabler fixerade.
- Högre derivator

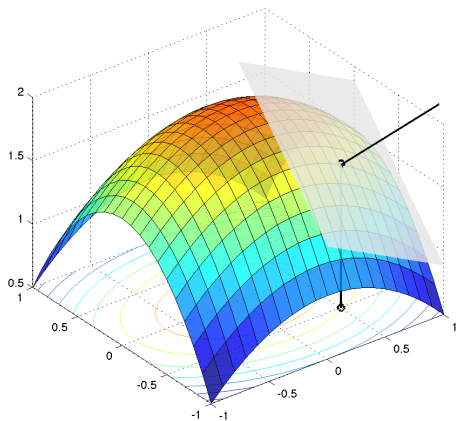
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

- Ordningen på blandade derivator kan kastas om (för "snälla" funktioner)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

# Normalvektorer och tangentplan

- Normalvektor:  $n = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ ,
- Tangentplan:  $z = f(a, b) + (x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b)$ .



- $z = 2 - \frac{1}{2}x^2 - y^2$
- $(a, b) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- $n = (-\frac{1}{2}, 1, -1)$
- $z = \frac{19}{8} - \frac{1}{2}x + y$

# Partiella derivator

Låt

$$f(x, y) = y \ln(x^2 + y^2).$$

Vad är  $f_x(x, y)$ ?

1  $\frac{y}{x^2 + y^2}$

2  $2xy \ln(x^2 + y^2)$

3  $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$

4  $\frac{y}{x^2} + y \ln(y^2)$

5  $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$

Vad är  $f_y(x, y)$ ?

1  $\frac{2y^2}{x^2 + y^2}$

2  $\ln(x^2 + y^2)$

3  $\frac{2y(x + y)}{x^2 + y^2}$

4  $\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2}$

5  $\frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2)$

Låt

$$f(x, y) = \sin(xy).$$

Bestäm tangentplanet till ytan  $z = f(x, y)$  i punkten  $(x, y, z) = (0, \pi/2, 0)$ .

1  $z = \sin(xy) + xy \cos(xy) + (y - \pi/2)x \cos(xy),$

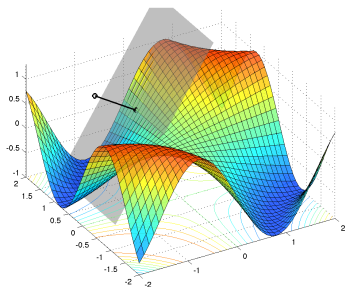
2  $z = 0,$

3  $z = -\frac{\pi}{2} + x + y,$

4  $z = \frac{\pi}{2}x,$

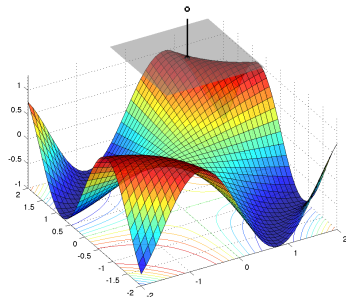
5  $z = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x + y.$

Tangentplan till  $z = \sin(xy)$



$$(x, y, z) = (0, \pi/2, 0)$$

$$z = \frac{\pi}{2}x$$



$$(x, y, z) = (1, \pi/2, 0)$$

$$z = 1$$

# Högre ordnings partiella derivator

Låt

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vad är  $f_{xx}(x, y)$ ?

- 1  $\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- 2  $\frac{x}{x^2 + y^2}$
- 3  $\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- 4  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- 5  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Vad är  $f_{xy}(x, y)$ ?

- 1  $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- 2 0
- 3  $-\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- 4  $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- 5  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

# Harmoniska funktioner

Vilken/vilka av följande funktioner är harmonisk(a)?

1

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

2

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

3

$$f(x, y) = (x - y)^2$$

4

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

5

$$f(x, y) = 3x + 5y$$