

Funktioner av flera variabler + Gränsvärden och kontinuitet

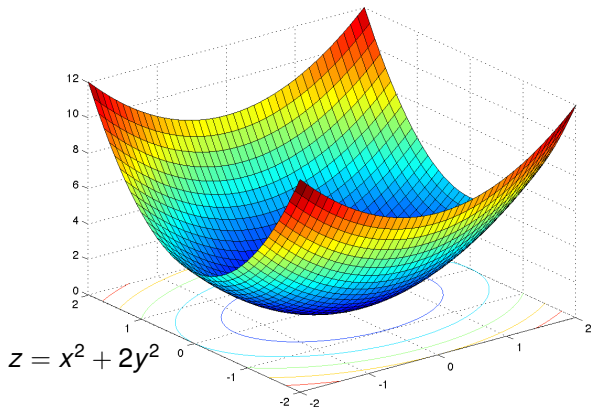
Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2016

Funktioner av flera variabler

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tilldelar ett unikt värde för varje punkt (x_1, x_2, \dots, x_n) i **definitionsområdet** $\subset \mathbb{R}^n$
- **Värdemängden** utgör alla de värden f antar.



Visualisering
(två variabler):

- **grafen**
(yta i \mathbb{R}^3)
- **nivåkurvor**
(kurvor i \mathbb{R}^2)

Definitionsmängd och värdemängd

Låt

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Vad är definitionsmängden?

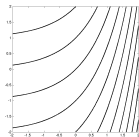
- 1 \mathbb{R}^2
- 2 Hela \mathbb{R}^2 utom origo
 $(x, y) = (0, 0)$
- 3 Första kvadranten, $x > 0$
och $y > 0$
- 4 Enhetsskivan $x^2 + y^2 \leq 1$
- 5 Komplementet till
enhetsskivan $x^2 + y^2 > 1$

Vad är värdemängden?

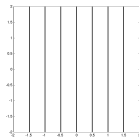
- 1 \mathbb{R}
- 2 $[0, \infty)$
- 3 $(0, \infty)$
- 4 $[0, 1]$
- 5 $(0, 1]$

Hur ser nivåkurvorna ut för funktionen $f(x, y) = xy$?

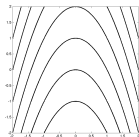
1



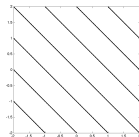
4



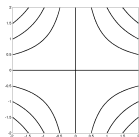
2



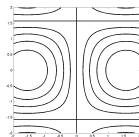
5



3



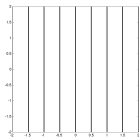
6



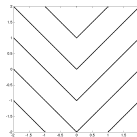
Nivåkurvor

Hur ser nivåkurvorna ut för funktionen $f(x, y) = |x| + |y|$?

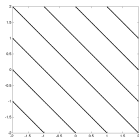
1



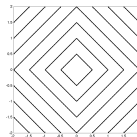
4



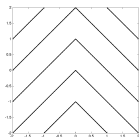
2



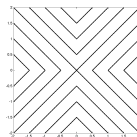
5



3



6



Plotta funktioner i Matlab

Initialisera variabler

```
>> x=-2:0.1:2;           % Skapa 1D-vektorer x och y
>> y=-2:0.1:2;
>> [X,Y]=meshgrid(x,y); % Skapa motsvarande matriser
```

Detta ger matriser med konstanta kolumner resp. rader

$$x = \begin{pmatrix} -2 & -1.9 & \cdots & 1.9 & 2 \\ -2 & -1.9 & \cdots & 1.9 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -2 & -1.9 & \cdots & 1.9 & 2 \\ -2 & -1.9 & \cdots & 1.9 & 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ -1.9 & -1.9 & \cdots & -1.9 & -1.9 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1.9 & 1.9 & \cdots & 1.9 & 1.9 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriserna används för att beräkna (med elementvisa "."-operationer) och plotta funktioner

```
>> Z = sin(X.*Y);           % Beräkna en funktion, sin(xy)
>> mesh(X,Y,Z);            % Plotta ytan i 3D
>> contour(X,Y,Z);        % Plotta funktionens nivåkurvor
```

Definition gränsvärde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L,$$

om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon, \quad \text{när} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

"f(x, y) kommer godtyckligt nära L, om (x, y) ligger tillräckligt nära (a, b)"

Definition kontinuitet

$f(x, y)$ kontinuerlig i (a, b) om

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

"Funktionsvärdet ska vara samma som gränsvärdet"

Vilket/vilka av följande gränsvärden existerar?

1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

2

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x^2 - y^2}$$

3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \cos(x^2 - y^2)$$

4

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Räkeregler, gränsvärden

1 Summa, differens

$$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$$

2 Produkt

$$\lim(f \times g) = \lim f \times \lim g$$

3 Kvot

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad (\lim g \neq 0)$$

4 Instängning

$$g \leq f \leq h \quad \text{och} \quad \lim g = \lim h, \\ \Rightarrow \lim f = \lim g = \lim h.$$

5 Sammansättning

$$\lim f(x, y) = M \quad \Rightarrow \quad \lim F(f(x, y)) = \lim_{t \rightarrow M} F(t)$$

6 Icke-existens

Om gränsvärdet längs olika vägar skiljer sig, eller $\rightarrow \infty$.

Beräkna

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(x+y)}{x^2+y^2}.$$

Svaret blir:

- 1 -1
- 2 0
- 3 $\sqrt{2}$
- 4 1
- 5 gränsvärdet existerar inte