SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Andra föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

20 januari 2016

Repetition

- Operationer på $\mathbb{R}^n$ från linjär algebra
- Avstånd ges av $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.
- Öppet klot med radie r och centrum i $\mathbf{a}$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

- Inre punkter, yttre punkter och randpunkter till mängder
- Öppna mängder, slutna mängder, begränsade mängder och kompakta mängder
- polära koordinater $[r, \theta]$ $\quad (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$
- cylindriska koordinater $[r, \theta, z]$ $\quad (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$
- sfäriska koordinater $[r, \theta, \phi]$
  $(x, y, z) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$

Vektorvärda funktioner i en variabel

Om vi vill se på en partikels position beroende på tiden har vi positionsvektorn

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Om funktionerna $x(t)$, $y(t)$ och $z(t)$ är deriverbara får vi hastighetsvektorn som

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Farten ges då av $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$ och accelerationen av

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

om $x(t)$, $y(t)$ och $z(t)$ är två gånger deriverbara.

Parametriserade kurvor

Om $\mathbf{r}(t)$ är deriverbar på intervallet $a \leq t \leq b$ ger det en parametrisering av kurvan C som består av punkterna $\mathbf{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$.

Exempel

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ är en parametrisering av enhetscirkeln, där $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exempel

$\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ är en annan parametrisering av enhetscirkeln, där $0 \leq t \leq \pi$.

Exempel

$\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ är en parametrisering av parabeln $y = x^2$, där $-\infty \leq t \leq \infty$.

Båglängd

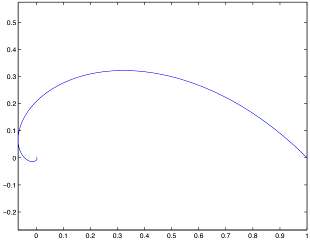
Sats

Om $r'(t)$ är kontinuerlig kan vi beräkna båglängden *av kurvan C som parametriseras av $\mathbf{r}(t),\ a \leq t \leq b$ som*

$$\int_a^b \left| r'(t) \right| \, dt = \int_a^b v(t)\, dt.$$

Fråga

Hur lång är spiralen som ges av $\mathbf{r}(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $t \geq 0$?



Från tentamen 2016-01-12

Den plana kurva C som ges av ekvationen $27y^2 = x(x-9)^2$ kan parametriseras genom $\mathbf{r}(t) = (3t^2, 3t - t^3)$ där t genomlöper hela den reella tallinjen.

1. Kontrollera att parameterkurvan är en del av kurvan C, det vill säga att punkterna på den uppfyller ekvationen för C. **(1 p)**
2. Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ för den parametriserade kurvan. **(1 p)**
3. Ställ upp den integral i parametern t som beräknar längden av den ögla som ges av intervallet $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$. Förenkla integranden så långt som möjligt. **(2 p)**

Kurvor som skärning mellan ytor

Parametrisera kurvan som ges av skärningen av planet $z = x + y$ med cylindern $x^2 + y^2 = 1$.