KTH ROYAL INSTITUTE
OF TECHNOLOGY

EL1000/1120 Reglerteknik AK

Föreläsning 9:
Tillståndsåterkoppling och observatör

Kursinfo: Tentamen

- Ordinarie tentamenstillfälle är fredagen den 15/1 kl.14.00-19.00
- Obligatorisk föranmälan ska ske senast två veckor före tentamentillfället på Mina sidor (Mina sidor-Tentamen-Mina tentor)
- Tillåtet att gå upp på omtenta för EL1000 period 1 (Fysik/Elektro) istället (fredagen den 8/1 kl.08.00-13.00)
- **OBS! Ej tillåtet att gå upp på båda dessa tentor. Välj en!**

Tips inför Lab2 och Lab3

- Förstärkning anges ofta i decibel (dB) i Matlab:

$$|G(i\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|G(i\omega)|\ \mathrm{dB}$$
$$|G_o(i\omega_c)|_{\mathrm{dB}} = 0\ \mathrm{dB}\ \ (\text{skärfrekvens})$$
$$|G_c(i\omega_B)|_{\mathrm{dB}} \approx -3\ \mathrm{dB}\ \ (\text{bandbredd})$$

- Flera av övningarna är till stor hjälp för att lösa uppgifterna i Lab3. T.ex.:
  - Kompensering: Övning 5.13
  - Tillståndsåterkoppling: Övning 9.14

Dagens program

- Lösning av tillståndsekvation (repetition, slides)
- Styrbarhet och observerbarhet (repetition, slides)
- Tillståndsåterkoppling (tavlan)
- Observatör (tavlan)

Optimering av kvadratiska kriterier, Glad & Ljung kapitel 9.3 ingår ej. Se fortsättningskurser i reglerteknik.

Tillståndsmodeller

- Linjär tillståndsbeskrivning

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

- Vektorn $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ kallas systemets tillstånd
- $x(t)$ innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida $y(t)$, givet framtida $u(t)$
- Lösningsformel:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- Matrisexponentialfunktion: e^{At}

Styrbarhet (Resultat 8.8)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad u(t),\, y(t) \in \mathbb{R}$$

Tillståndsmodell styrbar: Kan styra från $x(0) = 0$ till vilket tillstånd $x(T) = x^*$ som helst m.h.a. u, på ändlig tid T

$$\Leftrightarrow$$

Styrbarhetsmatrisen $\mathcal{S}$ har full rang

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$\Leftrightarrow$$

$$\det(\mathcal{S}) \neq 0$$

Observerbarhet (Resultat 8.9)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

Tillståndsmodell observerbar: Finns inget initialtillstånd $x(0) = x^* \neq 0$ så att $y(t) = 0, t \geq 0$, då $u(t) = 0, t \geq 0$

$$\Leftrightarrow$$

Observerbarhetsmatrisen $\mathcal{O}$ har full rang

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Leftrightarrow$$

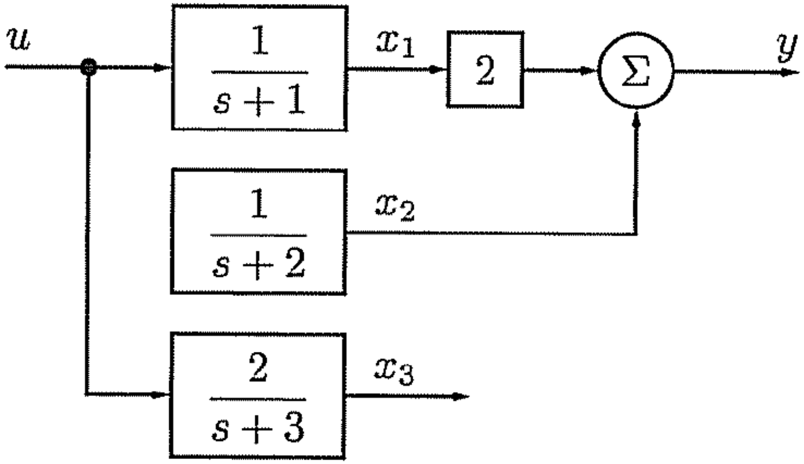
$$\det(\mathcal{O}) \neq 0$$

Exempel från Föreläsning 8

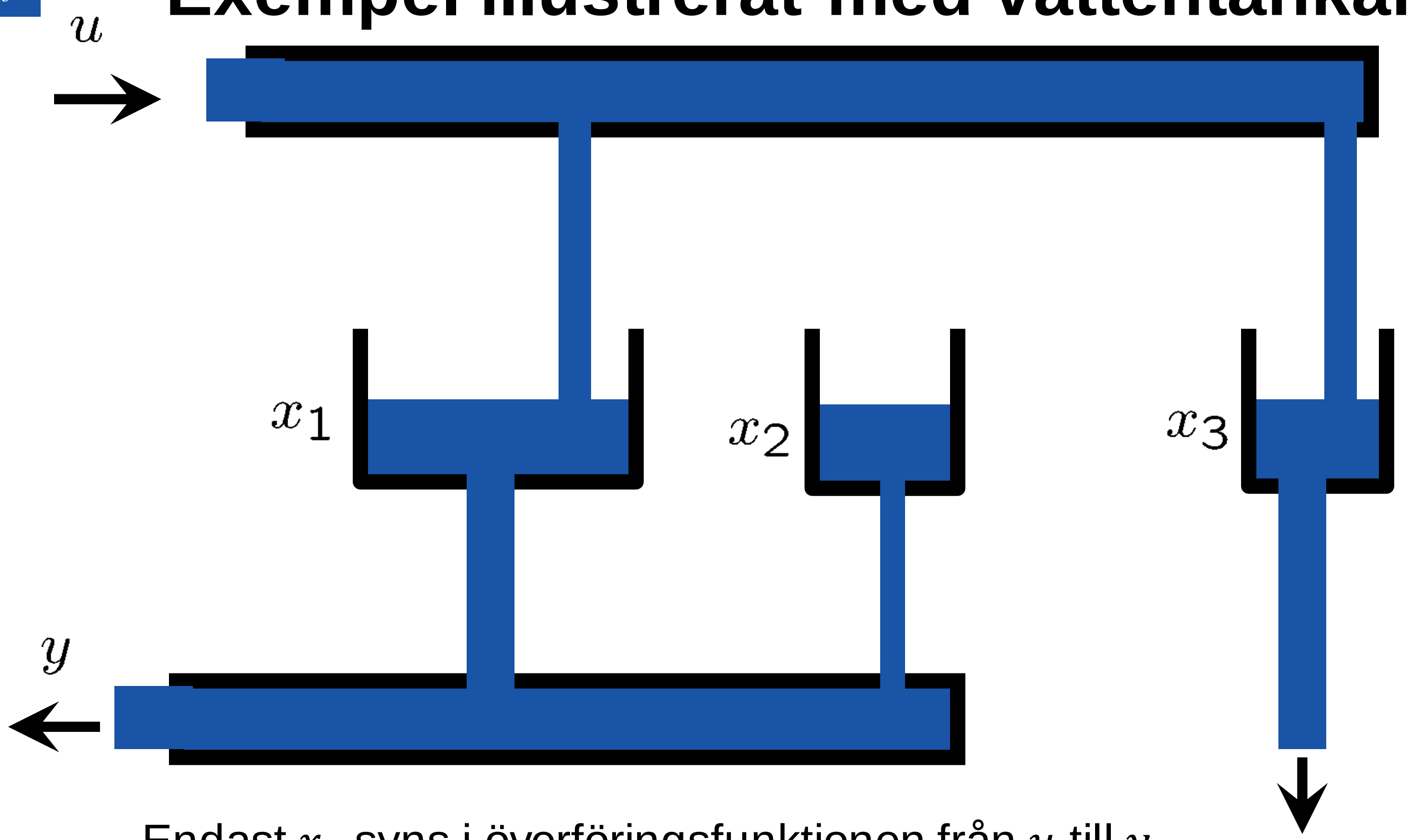
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

x_2 ej styrbar
x_3 ej observerbar



Exempel illustrerat med vattentankar



Endast x_1 syns i överföringsfunktionen från u till y

x_2 påverkas ej av u

x_3 syns ej i y

Minimala tillståndsmodeller (Resultat 8.11)

- Förkortningar av poler och nollställen i $G(s)$ beror på icke-observerbara eller icke-styrbara tillstånd

- Minimala tillståndsmodeller: Alla tillstånd styrbara och observerbara
  $\det(\mathcal{S}) \neq 0$ och $\det(\mathcal{O}) \neq 0$

- $G(s)$ ger en **yttre** beskrivning av systemet

- Tillståndsmodellen ger en **inre** beskrivning av systemet

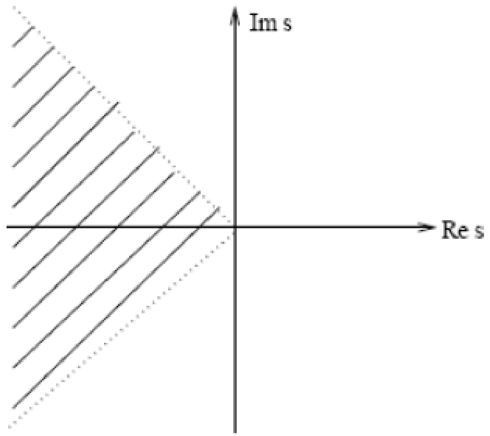
Dagens program

- Återkoppling från systemets samtliga tillstånd $x(t)$: Tillståndsåterkoppling

- Skattning av tillståndet $x(t)$ från mätning av utsignalen $y(t)$: Observatör (observerare)

Var ska polerna placeras?

- Valet av slutna systemets poler styrs av specifikationer på:
  - Önskad snabbhet och dämpning
  - Begränsningar på styrsignalens storlek
  - Robusthet (mot modellfel)
  - Känslighet (mot yttre störningar)



- Allmänna råd:
  - Flytta polerna iterativt tills specifikationer uppfyllda
  - Poler närmast origo viktigast
  - Välj poler som ger bra avvägning mellan snabbhet och dämpning

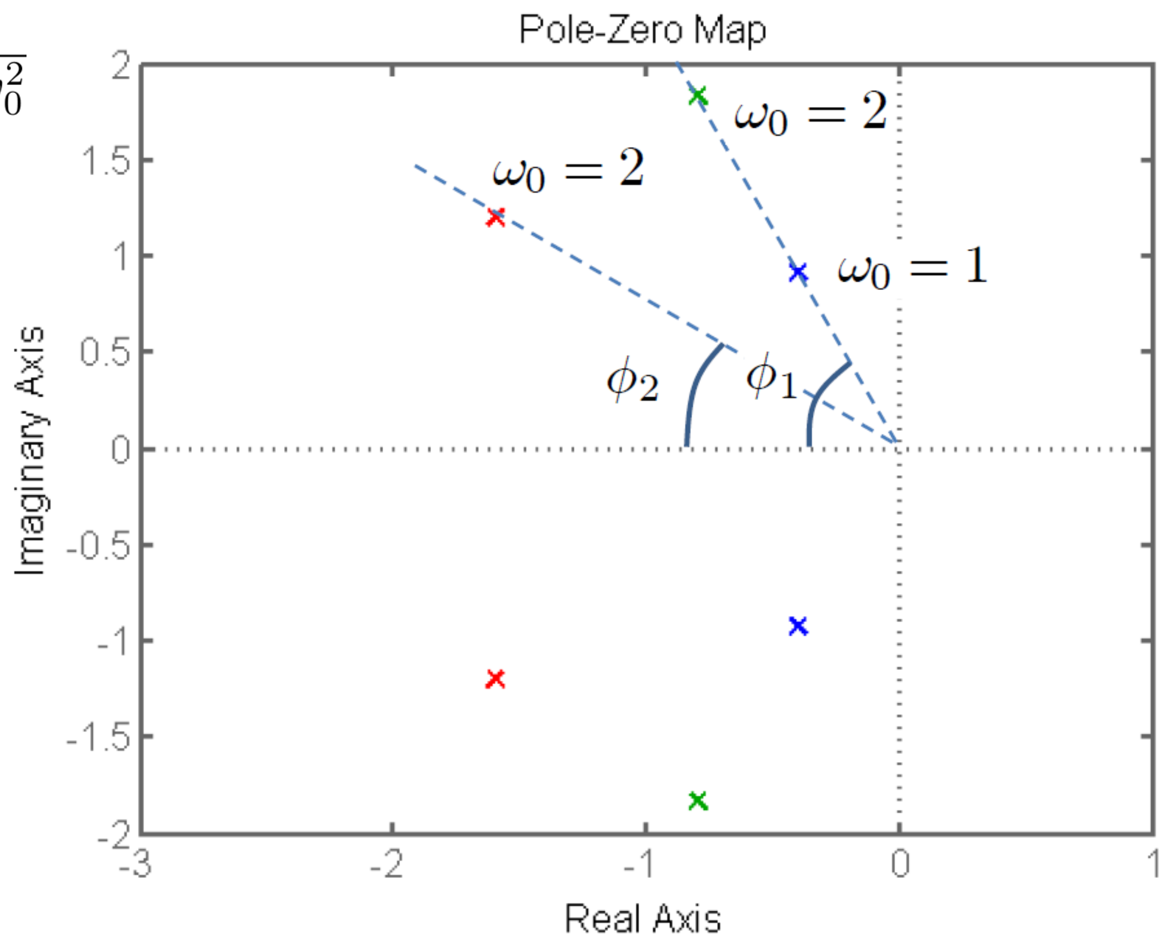
Typexempel: Polplacering

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos(\phi)$$

$$\phi_1 = \arccos 0.4$$

$$\phi_2 = \arccos 0.8$$



Typexempel: Polplacering

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos(\phi)$$

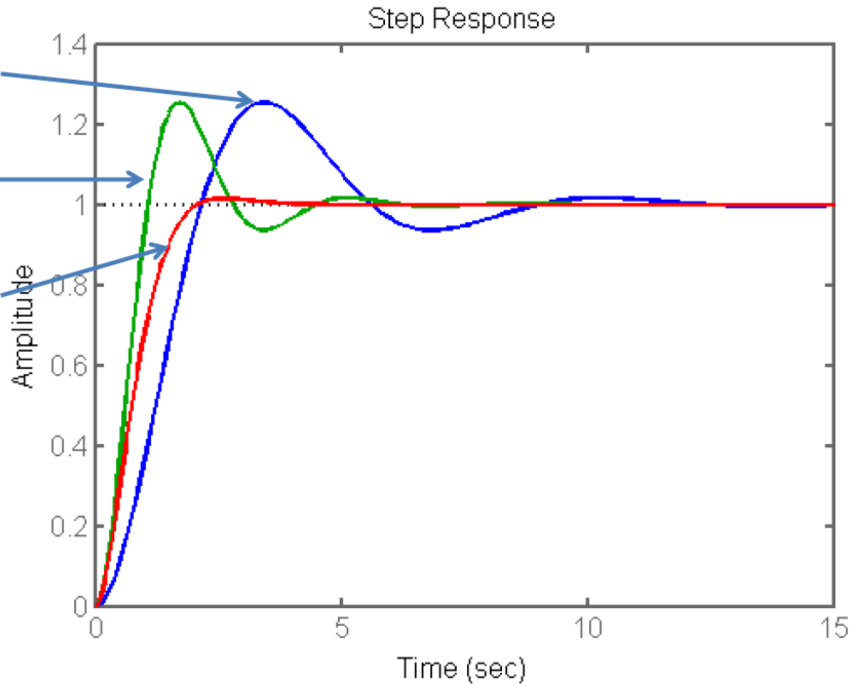
Snabbhet: ~1/stigtid $\approx \omega_0 e^{-\phi/\tan(\phi)}$

Dämpning: ~1/översläng $\approx e^{\alpha}$, $\alpha = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\omega_0 = 1,\ \zeta = 0.4$

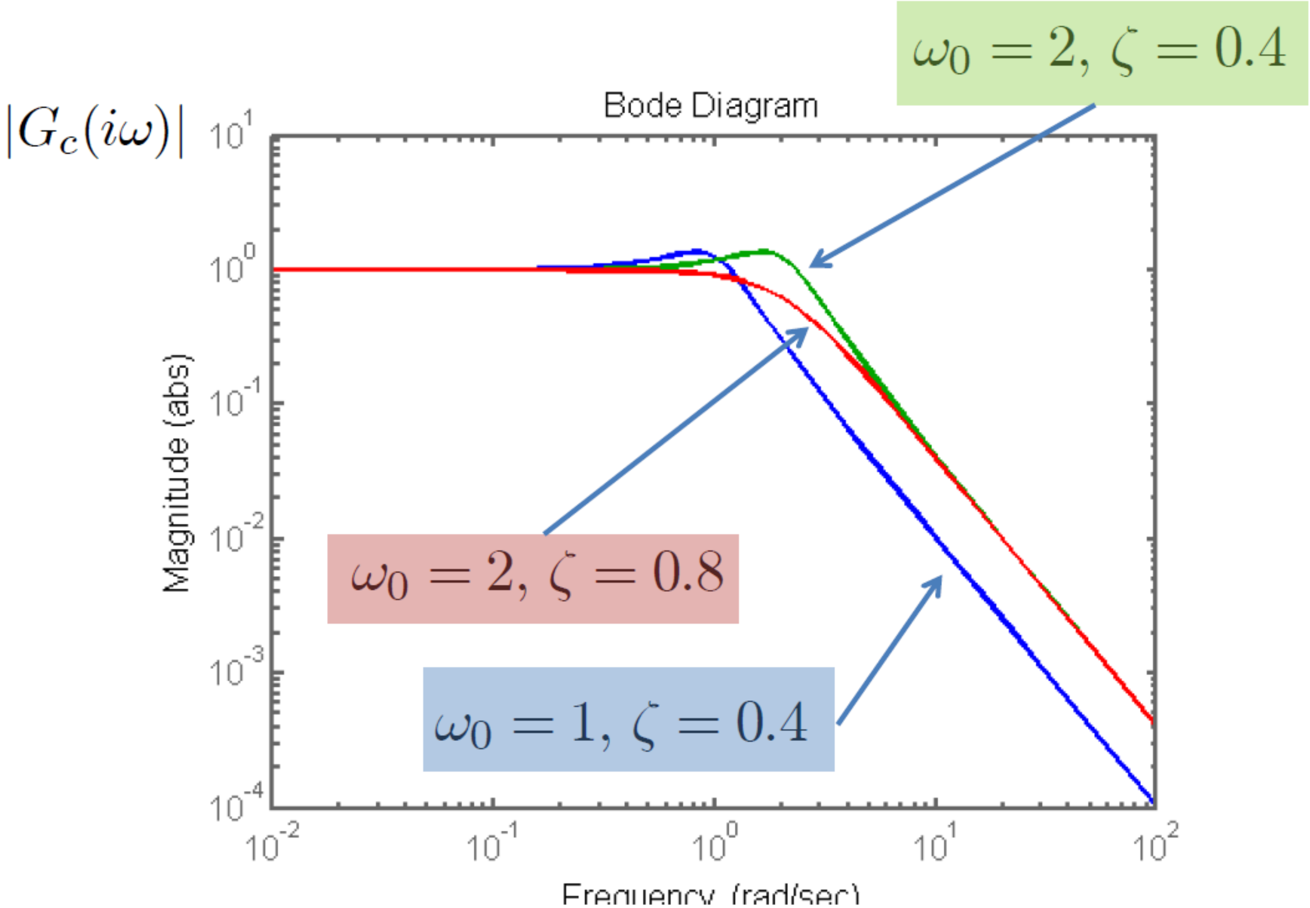
$\omega_0 = 2,\ \zeta = 0.4$

$\omega_0 = 2,\ \zeta = 0.8$



(Glad & Ljung: Exempel 3.3)

Typexempel: Polplacering



Quiz

(1) Är systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

styrbart?

Quiz

(2) Antag systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

ska styras med tillståndsåterkopplingen

$$u = -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x + l_0 r$$

- Hur ska l_1, l_2 väljas så att polerna hamnar i $\{-1 - i, -1 + i\}$?
- Hur bör man välja l_0?

Quiz

(3) Är systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

observerbart?

Quiz

(4) Antag att en observatör för systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

ska konstrueras.

Hur ska k_1 och k_2 väljas så att skattningsfelsdynamikens egenvärden hamnar i $\{-2-2i, -2+2i\}$?

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}), \quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\ &\tilde{x} = x - \hat{x} \\ &\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} \end{aligned}}$$