

1 december, 2015, Föreläsning 21

TILLÄMPAD LINJÄR ALGEBRA

Innehåll:

- Ortonormala baser (ON-baser)
- Gram-Schmidt's ortogonaliseringsprocess

Minsta-kvadratmetoden - exempel som löses på föreläsningen

1. **Uppgift.** Tentamen 19/1-15, uppgift 3

Anpassa kurvan $y = ax^2 + bx + c$ med minsta kvadratmetoden till följande tabell av data

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	4

Ortogonal/ortonormala vektorer och matriser

Låt \vec{u} och \vec{v} vara två vektorer i \mathbb{R}^n . Vad innebär det att vektorerna är

- Ortogonal?
- Ortonormala?

Kan en ortogonal mängd av nollskilda vektorer i \mathbb{R}^n vara linjärt beroende?

2. **Definition.** En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för ortogonal om $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ för alla \vec{v} (den bevarar längden).

3. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning och A vara matrisen till f . Följande är ekvivalent

- f är ortogonal.
- Kolonnerna i A bildar en ortonormal bas för \mathbb{R}^n .
- Raderna a A bildar en orthonormal bas för \mathbb{R}^n .
- A är inverterbar och $A^{-1} = A^T$

För en $n \times n$ -matris A gäller

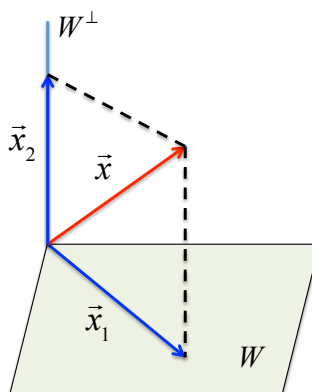
- A är ortogonal om kolonnerna är ortonormala, dvs, har längden 1 och är vinkelräta mot varandra.
- A är ortogonal om och endast om den är inverterbar och $A^{-1} = A^T$.

4. Projektion på delrum med ortonormal bas

Om W är ett nollskilt delrum till \mathbb{R}^n och \vec{x} är en vektor i \mathbb{R}^n då ges den ortogonala projektionen av \vec{x} på W av

$$\text{proj}_W \vec{x} = \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T}_{P} \vec{x}$$

(se sid 384, Teorem 7.7.5 i Anton) där A är en matris vars kolonner bildar en bas för W . (Jämför härledningen av normalekvationen i minsta kvadratmetoden med $\vec{x} = \vec{b}$, F20.) Matrisen P är standardmatrisen för ortogonal projektion av \mathbb{R}^n på W .



Om kolonnvektorerna i A är ortonormala är $A^T A = I$ och ortogonala projektionen av \vec{x} på W kan skrivas som

$$\text{proj}_W \vec{x} = A A^T \vec{x} = P \vec{x}.$$

P är standardmatrisen för ortogonal projektion av \mathbb{R}^n på W som är ett delrum med en ortonormal bas.

5. Ortogonal projektion på ON-baser

Om $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ är en bas för W i \mathbb{R}^n och \vec{x} i \mathbb{R}^n då gäller följande:

a) Om \mathcal{B} är en ORTONORMAL bas så är

$$(1) \quad \text{proj}_W \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_2 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_k) \vec{v}_k$$

b) Om \mathcal{B} är en ORTOGONAL bas så är

$$(2) \quad \text{proj}_W \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2 + \dots + \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|^2} \vec{v}_k$$

6. Uppgift. Olika sätt att beräkna ortogonal projektion.

En bas för planet W i \mathbb{R}^3 är given av $\vec{v}_1 = (0, 1, -1)$ och $\vec{v}_2 = (1, 2, 2)$.

- Hur ser vi att det är en bas?
- Är det en ortogonal bas?
- Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på W med hjälp av formel (2).
- Normalisera basvektorerna.
- Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på W med hjälp av formel (1).
- Låt nu de normaliserade basvektorerna utgöra kolonnerna i matrisen A . Beräkna $A^T A$ samt AA^T .
- Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på W genom att använda standardmatrisen för den ortogonala projektionen, AA^T .

Ortonormala baser (ON-baser)

7. Alla nollskilda delrum till \mathbb{R}^n har en ortogonal bas.

8. Gram-Schmidt's process för att skapa en ortogonal bas:

Låt W vara ett underrum till \mathbb{R}^n och låt $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ vara en bas för W . Följande steg kommer att producera en ortogonal bas, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$, för W .

Steg 1: Låt $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$.

Steg 2: Hitta en vektor \vec{v}_2 som är ortogonal mot \vec{v}_1 . Vektorn \vec{v}_2 är ortogonal mot \vec{v}_1 om \vec{v}_2 väljs som

$$\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1$$

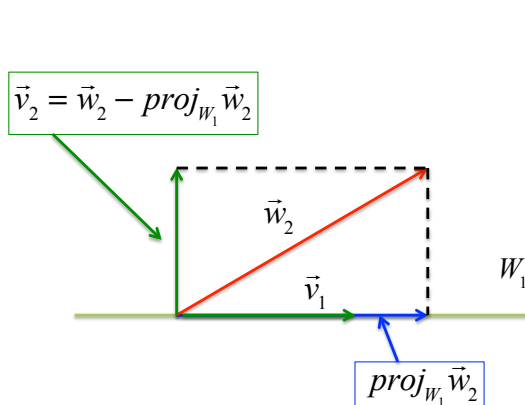
där W_1 är det delrum som spänns upp av \vec{v}_1 , se Figur 1.

Steg 3: Hitta en vektor \vec{v}_3 som är ortogonal mot \vec{v}_1 och \vec{v}_2 . Vektorn \vec{v}_3 är ortogonal mot \vec{v}_1 och \vec{v}_2 om \vec{v}_3 väljs som

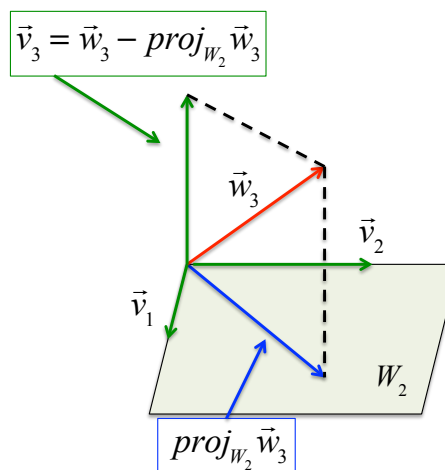
$$\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \text{proj}_{W_2} \vec{w}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2$$

där W_2 är det delrum som spänns upp av \vec{v}_1 och \vec{v}_2 , se Figur 2.

Steg 4-k: Fortsätt som ovan för att producera den fullständiga ortogonala basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ till W .



FIGUR 1. Vektorn \vec{v}_2 konstrueras så att den är orthogonal mot \vec{v}_1 . W_1 är delrummet som spänns upp av \vec{v}_1 .



FIGUR 2. Vektorn \vec{v}_3 konstrueras så att den är orthogonal mot \vec{v}_1 och \vec{v}_2 . W_2 är delrummet som spänns upp av \vec{v}_1 och \vec{v}_2 .

9. Alla nollskilda delrum till \mathbb{R}^n har en ortonormal bas.

Om vi föredrar en ortonormal bas kan vi normalisera den ortogonala basen, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$, vilket ger oss en ortonormal bas, $\{\vec{q}_1 = \vec{v}_1/\|\vec{v}_1\|, \vec{q}_2 = \vec{v}_2/\|\vec{v}_2\|, \dots, \vec{q}_k = \vec{v}_k/\|\vec{v}_k\|\}$.

10. Om W ett delrum till \mathbb{R}^n då kan varje orthogonal/ortonormal mängd av vektorer i W utökas till en orthogonal/ortonormal bas för W .

11. **Uppgift.** Gram-Schmidt's process.

Följande bas är given $\vec{w}_1 = (1, 2)$ och $\vec{w}_2 = (-1, 3)$. Konstruera en ON-bas \vec{q}_1 och \vec{q}_2 .

Svar: $\vec{q}_1 = 1/\sqrt{5}(1, 2)$, $\vec{q}_2 = 1/\sqrt{5}(-2, 1)$

12. **Uppgift.** Tenta 19/1-15, tal 4 (B-delen)

Planet H ges av ekvationen $3x - 5y + 3z = 0$.

a) Bestäm en ortonormal (ON) bas β för H .

b) Utvidga β till en ON-bas för \mathbb{R}^3 .

c) Låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonala projektionen på H . Bestäm matrisrepresentationen för T .

13. **Uppgift.** Tentatal SF1624: Låt $W = \text{im}(A)$ vara bildrummet (kolonnrummet) till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortonormal bas för W .

Svar: $\vec{q}_1 = 1/\sqrt{10}(-1, -1, 2, 2)$, $\vec{q}_2 = 1/\sqrt{590}(9, 19, 12, 2)$