Algoritmer, datastrukturer och komplexitet

Övning 8

Anton Grensjö
grensjo@csc.kth.se

12 november 2015

Kursplanering

Ö8: Mästarprov 1, oavgörbarhet

F24: Cooks sats

F25: NP-fullständighetsbevis

F26: NP-reduktionsvisualisering

Ö9: NP-fullständighetsbevis

F27: NP-fullständighetsreduktioner

F28: NP-fullständighetsreduktioner

Ö10: NP-fullständighetsbevis

Idag

- Bevis av NP-fullständighet
- Labbteoriredovisning inför labb 4

Teori

Definitioner m.m.

- När vi talar om NP-fullständighet är det beslutsproblem vi har att göra med.
- En lösning till en probleminstans är en textsträng med vars hjälp vi kan bekräfta att instansen är en ja-instans.
  - Exempel: Graffärgning.
    - Problem: "Existerar det en graffärgning med högst K färger?"
    - Lösning: En färgtilldelning av noderna.
    - Vi kan enkelt verifiera lösningen genom att kolla om färgningen är giltig. Om den är giltig så måste probleminstansen vara en ja-instans.
- Ett problem tillhör NP om vi kan verifiera en lösning på polynomisk tid.

Teori

Definitioner m.m.

- Om vi kan reducera ett problem A till ett problem B på polynomisk tid, så skriver vi $A \leq_P B$, och säger att B är minst lika svårt som A.
- Ett problem A är NP-svårt om varje problem i NP kan reduceras till A.
  - Dvs om A är minst lika svårt som alla problem i NP.
- Ett problem är NP-fullständigt om det tillhör NP och är NP-svårt.
  - Dvs: de NP-fullständiga problemen är de svåraste problemen i NP.

Uppgift 1: Vad säger reduktionerna?

Uppgift: A, B, C, D och E är beslutsproblem. B är NP-fullständigt. Det finns polynomiska Karpreduktioner mellan problemen enligt diagrammet:

$$
\begin{array}{ccccccc}
A & \rightarrow & B & \leftrightarrow & C & \leftarrow & D \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & E & & & &
\end{array}
$$

Avgör vilka problem som ligger i NP, vilka som är NP-svåra, samt vilka som är NP-fullständiga.

Kom ihåg:

- Ett problem tillhör NP om det kan verifieras på polynomisk tid.
- Ett problem A är NP-svårt om varje problem i NP kan reduceras till A.
- Ett problem är NP-fullständigt om det ligger i NP och är NP-svårt.

Bevis av NP-fullständighet

Vad bör ingå i ett bevis?

Säg att vi vill visa att problemet A är NP-fullständigt. Då bör vi utföra följande steg:

1. Visa att $A \in NP$.
   a) Föreslå vad en lösning kan vara.
   b) Visa att om svaret är ja så kan lösningen verifieras.
   c) Visa att verifikationen tar polynomisk tid.
2. Visa att A är NP-svårt.
   a) Hitta ett känt NP-fullständigt problem B att reducera.
   b) Hitta och beskriv en karp-reduktion av B till A.
   c) Bevisa att reduktionen är polynomisk.
   d) Bevisa att reduktionen är korrekt.
      i) Visa att ja-instanser mappas till ja-instanser och nej-instanser till nej-instanser.

   Vi vet sedan att $B \leq_p A$.
3. Nu har vi visat att A är NP-fullständigt!

Uppgift 2: Frekvensallokering

Vi har ett antal sändare, som alla ska ska sända på en viss frekvens. Varje sändare har en uppsättning tillåtna frekvenser. Vissa sändare är så nära varandra att de inte kan sända på samma frekvens utan att störa varandra. Vi vet alltså följande:

- Vilka sändare som finns.
- Varje sändares frekvensupsättning.
- Vilka par av sändare som skulle störa varandra om de sände på samma frekvens.

Problemet är att avgöra om det finns något möjligt val av frekvenser så att ingen sändare stör en annan. Visa att problemet är NP-fullständigt.

Formulera problemet som ett grafproblem

Uppgift 2: Frekvensallokering

Formulera problemet som ett grafproblem

- Låt hörn motsvara sändare
- Låt det gå en kant mellan sändare som riskerar att störa varandra
- Varje hörn är märkt med en frekvensuppsättning F_i.

Problemet: Går det att tilldela varje hörn v_i en frekvens från F_i så att inga närliggande hörn har samma frekvens?

1. Visa att Frekvensallokering ligger i NP.
   a) Låt en lösning vara en frekvenstilldelning till varje hörn.
   b) En lösning kan verifieras genom att
      - Gå igenom varje hörn v_i och verifiera att dess frekvens tillhör F_i.
      - Gå igenom varje kant (v, u) och verifiera att v och u har olika frekvenser.
   c) Verifieringen tar linjär tid i grafens storlek och är därmed polynomisk.

Frekvensallokering

2. Visa att Frekvensallokering är NP-svårt.
   a) Vilket känt NP-fullständigt problem ska vi reducera?
   Graffärgning är lämpligt.
   b)
   function K-FÄRGNING(G, k)
       for varje hörn v_i i grafen G **do**
           $F_i \leftarrow \{1, \ldots, k\}$
       return frekvensallokering$(G, \{F_i\})$
   c) Det enda reduktionen gör är att skapa en k-mängd för varje hörn i grafen. Uppenbart polynomiskt.
   d) Korrekthetsbevis, se nästa sida.

När korrekthetsbeviset är slutfört kan vi dra slutsatsen att Frekvensallokering är NP-fullständigt.

Frekvensallokering

Korrekthet för reduktionen

Säg att reduktionen omvandlar en instans s av k-färgning till en instans s' av frekvensallokering. Vi vill visa att de båda instanserna ger samma svar, dvs:

1. Om s är en ja-instans av graffärgning så är s' en ja-instans av frekvensallokering.
2. Om s' är en ja-instans av frekvensallokering så är s en ja-instans av graffärgning.

I vårt fall kan detta översättas till att vi vill visa:
Det finns en k-färgning av grafen $G \iff$ Det finns en tillåten frekvenstilldelning till G där alla hörn har frekvensuppsättningen $\{1, \ldots, k\}$.

- $\implies$: Antag att vi har en k-färgning av G. Numrera färgerna 1 till k. Om ett hörn fått färgen i, låt motsvarande sändare få frekvensen i. Detta blir en tillåten tilldelning, eftersom vi utgick från en tillåten k-färgning.
- $\impliedby$: Antag att vi har en tillåten frekvenstilldelning. Vi får en k-färgning genom att låta ett hörn få färg i om motsvarande sändare har fått frekvens i.

Hamiltonsk stig i graf

Visa att problemet HAMILTONIAN PATH är NP-fullständigt. Kom ihåg: En hamiltonsk stig är en stig som besöker varje hörn exakt en gång.

1. Visa att HAMILTONIAN PATH ligger i NP.
   Låt en lösning vara en sekvens av noder. Vi kan verifiera denna genom att kontrollera att närliggande noder har kanter mellan sig, samt att varje nod förekommer exakt en gång. Detta går uppenbart att göra på polynomisk tid.

Uppgift 3: Hamiltonsk stig i graf

2. Visa att HAMILTONIAN PATH är NP-svårt.
   - Vi väljer att reducera HAMILTONIAN CYCLE.
   - Vi vill givet en graf G konstruera en graf G' sådan att G har en hamiltoncykel om och endast om G' har en hamiltonstig.
   - Välj en nod u och “kopiera” den till en ny nod u' med “samma kanter”. Lägg till två nya noder v, v' som kopplas till varsin kopia.
   - Antag att G har en hamiltoncykel. Då kan vi bilda en hamiltonstig i G' genom att börja i v, följa cykeln till u' och slutligen till v'.
   - Antag att G' har en hamiltonstig. Måste ha ändpunkter i v och v'. Om vi struntar i dessa har vi en stig från u till u'. Om vi låter stigen gå till u istället för u' har vi en hamiltoncykel i G.

En konstruktion av detta slag kallas för en gadget.

Uppgif 4: Spännande träd med begränsat gradtal

Givet en oriktad graf $G = (V, E)$ och ett heltal k, avgör ifall G innehåller ett spännande träd T så att varje hörn i trädet har gradtal högst k.
Visa att problemet är NP-fullständigt.

1. Visa att spännande träd-problemet tillhör NP.
   Definiera en lösning som ett träd T som är en subgraf till G. Verifiera en lösning genom att kolla att det är ett träd, att alla noder är med, samt att varje gradtal är högst k. Detta görs enkelt på polynomisk tid.

Uppgift 4: Spännande träd med begränsat gradtal

2. Visa att spännande träd-problemet är NP-svårt.
   Vi reducerar Hamiltonstig. Hur?

   function HAMILTONSTIG(G)
       return SPÄNNANDETRÄD($G, 2$)

   Vill visa att G har en hamiltonstig $\iff$ G har ett spännande träd där alla noder har gradtal högst 2.

   $\Longrightarrow$: Antag att G har en hamiltonstig. Men denna är ett träd, besöker alla noder och förgrenar sig inte. Är alltså ett spännande träd där alla noder har grad ≤ 2.

   $\Longleftarrow$: Vi kan på liknande sätt se att ett spännande träd med alla noder av grad ≤ 2 måste vara en hamiltonstig.

Uppgift 5: Polynomisk reduktion

Konstruera en polynomisk reduktion av 3CNF-SAT till EQ-GF[2].

3CNF-SAT: Vi har ett boolskt uttryck som t.ex. följande:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4)$$

Finns det en variabeltilldelning så att uttrycket är satisfierat?

EQ-GF[2]: Givet ett system av polynomekvationer över heltalen modulo 2, existerar det en lösning?

Lösning:

- Vi börjar med ett enklare problem: Kan vi för en viss klausul från 3CNF-SAT hitta en polynomekvation mod 2 som är uppfylld om och endast om klausulen är satisfierad?

Uppgift 5: Polynomisk reduktion

Säg att vi har klausulen $(x \vee y \vee z)$. Kan vi konstruera en ekvation som är uppfylld om och endast om klausulen är uppfylld?

- Låt sant motsvara 1 och falskt motsvara 0.
- Om vi räknar modulo 2 så är alltså $\bar{x} = 1 + x$.
- Slutsats: klausulen är sann om och endast om:

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 0$$

$$\iff 1 + x + y + z + xy + yz + xy + xyz = 0$$

$$\iff x + y + z + xy + yz + xy + xyz = 1$$

Vad gör vi av negationer, som $\bar{x}$? Ersätt med $(1+x)$.
Vi kan alltså reducera 3CNF-SAT till EQ-GF[2] genom att enligt ovan konstruera en ekvation Q_i för varje klausul C_i, och bilda ekvationssystemet Q av alla Q_i.

Uppgift 5: Polynomisk reduktion

Bevis

Vi börjar med att notera att $(1 + x)$ är inversen till x, ty $1 + 1 = 0$ och $1 + 0 = 1$, så vi kan utan inskränkning strunta i att behandla inverser.

$\Longleftarrow$: Antag att en ekvation Q_i är satisfierbar. Då finns det en variabeltilldelning så att vänsterledet summeras till 1. Denna tilldelning gör enligt ovan så att minst en av literalerna i C_i är sann. Klausulen är alltså satisfierbar. Om hela Q är satisfierbart så är hela φ satisfierbar.

$\Longrightarrow$: Om φ är satisfierad, så finns det en varabeltilldelning så att varje klausul är satisfierad. Men enligt resonemanget ovan så innebär det också att varje ekvation Q_i är satisfierbar.

Uppgift 6: Är en Eulergraf k-färgbar?

Betrakta beslutsproblemet att givet en Eulergraf G och ett heltal $k \geq 3$ avgöra om G är k-färgbar. Är detta NP-fullständigt?
Ja. Ligger i NP, då det är enkelt att verifiera om en lösning är en korrekt färgning. För att visa NP-svårt så reducerar vi k-färgningsproblemet.

- Säg att vi har en graf G. Vi gör om den till en Eulergraf G' enligt följande:
  - Handskakningslemmat $\implies$ det finns ett jämnt antal noder med udda valens.
  - Para ihop dessa noder två och två.
  - För varje par, inför ett nytt hörn, med en kant till vardera hörn i paret.
- Varför är G' en Eulergraf?
- Modifikationerna påverkar inte antalet färger, varför inte?

Uppgift 6: Är en Eulergraf k-färgbar?

Visa G k-färgbar $\iff$ G' k-färgbar.

$\Longrightarrow$: Antag f en färgning av G (varje hörn x får en färg $f(x)$). Definiera färgningen f' av G':

- Om $x \in G, \;\; f'(x) = f(x)$
- Om $x \notin G$ så finns det två grannhörn $y, z \in G$. Låt $f(x)$ vara en godtycklig färg som är skild från $f(y)$ och $f(z)$.

$\Longleftarrow$: Trivialt. Varför?

Nästa gång

Vi fortsätter med fler och svårare NP-fullständighetsbevis.