

(7)

Schur Complement

$$M = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$$

① Want to find the inverse of M .

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E+AG & F+AH \\ G & H \end{bmatrix}$$

② want clear out $F+AH$

$$\Rightarrow F+AH=0 \Rightarrow AH=-F \Rightarrow A=-FH^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I & -FH^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E-FH^{-1}G & 0 \\ G & H \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E-FH^{-1}G & 0 \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E-FH^{-1}G & 0 \\ G-HB & H \end{bmatrix}$$

③ Want to clear out

$$\Rightarrow G-HB=0 \Rightarrow HB=-G \Rightarrow B=-H^{-1}G$$

$$\begin{bmatrix} E-FH^{-1}G & 0 \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -H^{-1}G & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E-FH^{-1}G & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$$