KTH Teknikvetenskap

# SF1625 Envariabelanalys
# Lösningsförslag till tentamen 2014-10-24

## DEL A

1. Betrakta funktionen $f$ som ges av $f(x) = 1 + x + \dfrac{4}{(x-2)^2}$.

   A. Bestäm definitionsmängden till $f$.
   B. Bestäm alla intervall där $f$ är växande respektive avtagande.
   C. Bestäm alla lokala extrempunkter till $f$.
   D. Bestäm alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
   E. Skissa med hjälp av ovanstående funktionsgrafen $y = f(x)$.

*Lösning.* A. Funktionen är definierad för alla $x \neq 2$.

B. Vi deriverar och får

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-2)^3},$$

som existerar för alla $x \neq 2$. Vi ser att $f'(x) = 0 \iff x = 4$. Ett teckenstudium av derivatan:

Om $x < 2$ så är $f'(x)$ positivt.

Om $2 < x < 4$ så är $f'(x)$ negativt.

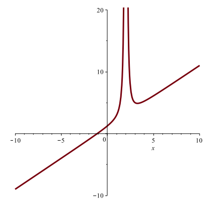
Om $x > 4$ så är $f'(x)$ positivt.

Det följer av ovanstående att $f$ är strängt växande på intervallet $x < 2$, strängt avtagande på intervallet $2 < x < 4$ och strängt växande på intervallet $x > 4$,

C. Det följer direkt av undersökningen ovan att $f$ har exakt en lokal extrempunkt, nämligen ett lokalt minimum i $x = 4$.

D. Eftersom $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ så är linjen $x = 2$ en lodrät asymptot till kurvan $y = f(x)$. Eftersom vidare $\lim_{x\to\pm\infty} 4/(x-2)^2 = 0$ så är linjen $y = x + 1$ sned asymptot i $\pm\infty$.

E. Nu kan vi skissa grafen:



□

**Svar:** A. Alla $x \neq 2$. B. Strängt växande på intervallet $x < 2$, strängt avtagande på intervallet $2 < x < 4$ och strängt växande på intervallet $x > 4$. C. Ett lokalt minimum i $x = 4$. D. Lodrät asymptot $x = 2$, sned asymptot $y = x + 1$ i plus och minus oändligheten. E. Se ovan.

2. Beräkna nedanstående integraler:

   A. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}\,dx$ (använd gärna substitutionen $u = x^2 + 4$)

   B. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\ln x\,dx$ (använd gärna partiell integration)

*Lösning.* A. Vi använder substitutionen $u = x^2 + 4$, med $du = 2x\,dx$ och nya gränser $4$ och $8$, och får:

$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^8 \frac{du}{u^{1/3}} = \left[\frac{3u^{2/3}}{4}\right] = 3 - \frac{3}{2^{2/3}}.$$

B. Vi använder partiell integration och får

$$\int_1^4 \sqrt{x}\ln x\,dx = \left[\frac{x^{3/2}\ln x}{3/2}\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{3/2}\,dx = \frac{16\ln 4}{3} - \frac{28}{9}.$$

$\square$

**Svar:** A. $3 - \frac{3}{2^{2/3}}$. B. $\frac{16\ln 4}{3} - \frac{28}{9}$.

3. Bestäm den största area en rätvinklig triangel kan ha, om hypotenusan och ena kateten har en sammanlagd längd av $1$ meter.

*Lösning.* Låt hypotenusan ha längden $1 - x$ meter. Då har ena kateten längden $x$ meter och den andra kateten enligt Pythagoras sats har då längden $\sqrt{1-2x}$ meter. Arean av triangeln ges då av

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-2x}, \qquad \text{där } 0 < x < 1/2.$$

Vi deriverar och får

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-2x} - x \cdot \frac{2}{2\sqrt{1-2x}}\right) = \frac{1-3x}{2\sqrt{1-2x}}.$$

Vi ser att $A'(x) = 0 \iff x = 1/3$ och ett teckenstudium av derivatan ger:
Om $0 < x < 1/3$ så är $A'(x) > 0$ och $A(x)$ alltså strängt växande.
Om $1/3 < x < 1/2$ så är $A'(x) > 0$ ch $A(x)$ alltså strängt avtagande.

Det följer av ovanstående att det största värdet som arean kan anta är $A(1/3) = \sqrt{18}/3$ kvadratmeter.

□

**Svar:** $\sqrt{18}/3$ kvadratmeter.

## DEL B

4. Betrakta funktionen $f(t) = e^{-t} + \sin t - \cos t$..
   A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $t = 0$ till funktionen $f$.
   B. Ange feltermen (på valfri form).
   C. Beräkna gränsvärdet $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2}$..

*Lösning.* A. Med hjälp av de kända utvecklingarna av exponential-, sinus och cosinus-funktionerna (eller genom derivering etc) fås andra gradens Taylorpolynom till $f$ kring origo som $p(t) = t^2$..

B. Feltermen är $B(t)t^3$ för någon funktion $t$ som är begränsad i någon omgivning av origo. (kan också uttryckas på andra sätt, t ex som $\mathcal{O}(t^3)$)

C. Med hjälp Taylorpolynomet ovan får vi (för någon funktion $B$ som är begränsad runt origo):

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + B(t)t^3}{t^2} = \lim_{t\to 0}(1 + B(t)t) = 1.$$

□

**Svar:** A. $p(t) = t^2$. B. $B(t)t^3$ för någon funktion $t$ som är begränsad i någon omgivning av origo. C. $1$

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x \, dx$.

*(För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men en approximativ beräkning kan ge delpoäng. Svaret får inte innehålla namn på elementära funktioner (som* $\arcsin$*)).*

*Lösning.* Vi beräknar integralen exakt med hjälp av partiell integration mm:

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{\pi}{2} + [\sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(Den som istället vill approximera integralen har att välja på flera metoder, t ex använda en Riemannsumma, använda trapetsregeln eller Taylorutveckla integranden.) $\square$

**Svar:** $\pi/2 - 1$

6. Laddningen $q(t)$ över kondensatorn i en viss växelströmskrets uppfyller differentialekvationen

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 4q = 39\cos t$$

med initialvillkoren $q(0) = 0$ och $q'(0) = 0$.

A. Bestäm laddningen över kondensatorn vid tiden $t$.

B. Vi säger att $q(t)$ har långtidsbeteendet $f(t)$ om $\lim_{t\to\infty} |q(t) - f(t)| = 0$. Bestäm långtidsbeteendet hos laddningen över kondensatorn.

*Lösning.* För att lösa differentialekvationen och bestämma $q(t)$ konstaterar vi att $q(t) = q_h(t) + q_p(t)$ där $q_h$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation och $q_p$ är någon partikulärlösning till den givna differentialekvationen.

Vi söker först $q_h$. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 2r + 4 = 0$ har lösning $r = -1 \pm i\sqrt{3}$ varför

$$q_h(t) = e^{-t}(A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t), \quad A, B \text{ godtyckliga konstanter.}$$

Vi söker sedan $q_p$ och gör ansatsen $q_p(t) = c\cos t + d\sin t$. Efter derivering, insättning i differentialekvationen och identifiering av koefficienter ser vi att vi har en partikulärlösning

$$q_p(t) = 9\cos t + 6\sin t.$$

Vi har alltså att den allmänna lösningen till differentialekvationen i uppgiften är

$$q(t) = e^{-t}(A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t) + 9\cos t + 6\sin t, \quad A, B \text{ godtyckliga konstanter.}$$

Begynnelsevillkoret $q(0) = 0$ ger $A = -9$ och villkoret $q'(0) = 0$ ger $B = -5\sqrt{3}$ så laddningen över kondensatorn vid tiden $t$ ges av

$$q(t) = e^{-t}(-9\cos\sqrt{3}t - 5\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t) + 9\cos t + 6\sin t.$$

B. Vi har att $\lim_{t\to\infty} e^{-t}(-9\cos\sqrt{3}t - 5\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t) = 0$ så det som blir kvar när tiden går mot oändligheten är $f(t) = 9\cos t + 6\sin t$. Detta är långtidsbeteendet hos $q(t)$.

□

**Svar:** A. $q(t) = e^{-t}(-9\cos\sqrt{3}t - 5\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t) + 9\cos t + 6\sin t$.

B. $f(t) = 9\cos t + 6\sin t$.

## DEL C

7. Ge exempel på nedanstående. Endast svar krävs.
   A. En funktion med definitionsmängd $\mathbb{R}$ som är strängt växande och begränsad
   B. En funktion med definitionsmängd $\mathbb{R}$ som är strängt avtagande och positiv
   C. En funktion med definitionsmängd $\mathbb{R}$ som inte är kontinuerlig i punkten $x = 4$
   D. En funktion som är deriverbar två, men inte tre, gånger i punkten $x = 0$

*Lösning.* □

**Svar:** A. T ex $f(x) = \arctan x$
B. T ex $g(x) = e^{-x}$
C. T ex $h(x)$ som ges av: $h(x) = 0$ för alla $x < 4$ och $h(x) = 1$ för alla $x \geq 4$
D. T ex $k(x) = x^2|x|$

8. Betrakta funktionen $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \cos t \, dt$ med definitionsmängd $D = [0, \pi]$.

   A. Ange de delintervall av $D$ där $F$ är växande respektive avtagande.

   B. Bestäm punkter $a$ och $b$ i $D$ sådana att

   $F(a) \leq F(x)$ för alla $x \in D$,

   $F(b) \geq F(x)$ för alla $x \in D$.

*Lösning.* Vi ser direkt att $F$ är kontinuerlig på $[0, \pi]$ som är slutet och begränsat. Existensen av punkter $a$ och $b$ med egenskaper som i uppgiften är därför klar. De kan vara kritiska punkter, ändpunkter eller singulära punkter. Vi deriverar och får $F'(x) = e^{-x^2} \cos x$ som existerar för alla $x$ sådana att $0 < x < \pi$. Inga singulära punkter finns alltså. Vi gör ett teckenstudium av $F'(x)$ och ser att:

+ på intervallet $0 < x < \pi/2$ är $F'(x) > 0$

+ i punkten $x = \pi/2$ gäller att $F'(x) = 0$

+ på intervallet $\pi/2 < x < \pi$ är $F'(x) < 0$

Det följer av ovanstående att $F$ är strängt växande på $[0, \pi/2]$ och strängt avtagande på $[\pi/2, \pi]$.

Vi observerar också att ovanstående resonemang visar att $F$ har en lokal och global maxpunkt i $x = \pi/2$, så om vi väljer $b = \pi/2$ så är $F(b) \geq F(x)$ för alla $x \in D$.

Det minsta värdet av $F$ måste nu antas i någon av ändpunkterna i intervallet, så det enda vi behöver göra är att jämföra $F(0)$ och $F(\pi)$. Vi ser direkt att $F(0) = 0$. Vi har att

$$F(\pi) = \int_0^\pi e^{-t^2} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} e^{-t^2} \cos t \, dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{-t^2} \cos t \, dt.$$

Eftersom $e^{-t^2} \cos t > 0$ på $[0, \pi/2)$ så är $\int_0^{\pi/2} e^{-t^2} \cos t \, dt > 0$ och eftersom $e^{-t^2} \cos t < 0$ på $(\pi/2, \pi]$ så är $\int_{\pi/2}^\pi e^{-t^2} \cos t \, dt < 0$ . Dessutom gäller att

$$\left| \int_0^{\pi/2} e^{-t^2} \cos t \, dt \right| > \left| \int_{\pi/2}^\pi e^{-t^2} \cos t \, dt \right|$$

eftersom $\cos t$ är symmetrisk kring $\pi/2$ och $e^{-t^2}$ är avtagande. Det följer att $F(\pi) > 0$. Om vi väljer $a = 0$ så gäller alltså att $F(a) \leq F(x)$ för alla $x \in D$.

$\square$

**Svar:** A. $F$ är strängt växande på $[0, \pi/2]$ och strängt avtagande på $[\pi/2, \pi]$.

B. Vi ska välja $a = 0$ och $b = \pi/2$

9. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$.

*Lösning.* Vi observerar att summan $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$ är en Riemannsumma med $n$ lika stora delintervall till integralen

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx.$$

Eftersom integranden är kontinuerlig på hela integrationsintervallet inklusive ändpunkterna konvergerar följden av Riemannsummorna när $n \to \infty$ mot integralen. Vi har alltså att

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n} = \int_0^1 x \arctan x \, dx.$$

Vi beräknar integralen med partiell integration i första steget:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \arctan x \, dx &= \left[ \frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \\
&= \frac{\pi - 2}{4}.
\end{aligned}$$

□

**Svar:** $\frac{\pi-2}{4}$