29 september, 2015. Föreläsning 8

TILLÄMPAD LINJÄR ALGEBRA

INNEHÅLL

- Konditionstal och Konditionssats.

1. **Def.**

$$\left\|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\right\|_\infty = \max \left\{ \begin{matrix} |a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1n}| \\ \\ |a_{21}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{2n}| \\ \\ \vdots \\ \\ |a_{m1}| + |a_{m2}| + \cdots + |a_{mn}| \end{matrix} \right\}$$

Till exempel:

$$\left\|\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}\right\|_\infty = 5 \qquad \left\|\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|_\infty = \max\{4, 14, 1\} = 19$$

$||A||_\infty$ kallas for **max norm** av A.

2. **Proposition.** Max norm har följande egenskaper:

(1) $||A||_\infty \geq 0$;
(2) $||A||_\infty = 0$ on och endast om $A = 0$;
(3) $||\alpha A|||_\infty = |\alpha|||A||_\infty$ där α är i $\mathbf{R}$;
(4) $||A + B||_\infty \leq ||A||_\infty + ||B||_\infty$;

3. Vi har ofta att göra med följande scenario:

(1) Antar att en slutsats erhålls genom att lösa ett system av linjära ekvationer:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

(2) Matrisen A beskrivs precis.
(3) Vi måste göra mätningar för vektor $\vec{b}$ och i verkligheten får vi aldrig exakta koordinater av $\vec{b}$. Vi vet graden av felet när mätningar göras. Låt $\vec{b}_a$ vara en approximation av $\vec{b}$. Vektorn $\vec{b}_a$ är våra mätningar. För att vi vet graden av felet, kan $||\vec{b} - \vec{b}_a||_\infty$ inte vara store än något fel.

$\boxed{\vec{b} - \vec{b}_a \text{ kallas för } \textbf{residual error} \text{ och } ||\vec{b} - \vec{b}_a||_\infty \text{ kallas för } \textbf{backward error}.}$

$\boxed{\frac{||\vec{b}-\vec{b}_a||_\infty}{||\vec{b}||_\infty} \text{ kallas för } \textbf{relative backward error}}$

Till exempel betrakta följande system:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1.0001 & 1 & 2.0001 \end{array}\right]$$

Här $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$. Låt $\vec{b}_a = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}$. **Backward error** är lika med:

$$||\vec{b} - \vec{b}_a||_\infty = \left|\left|\begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}\right|\right|_\infty = \left|\left|\begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix}\right|\right|_\infty = 0.0001$$

$$||\vec{b}||_\infty = \left|\left|\begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}\right|\right|_\infty = 2.0001$$

Relative backward error är lika med $\frac{0.0001}{2.0001} < 0.00005 = 0.005\%$ av $||\vec{b}||_\infty$.

(4) Istället för att lösa $A\vec{x} = \vec{b}$, vi kan bara lösa $A\vec{x}_a = \vec{b}_a$. Fråga bedöma $||\vec{x}-\vec{x}_a||_\infty$?

$\boxed{||\vec{x} - \vec{x}_a||_\infty \text{ kallas för } \textbf{forward error}.}$

$\boxed{\frac{||\vec{x}-\vec{x}_a||_\infty}{||\vec{x}||_\infty} \text{ kallas för } \textbf{relative forward error}}$

I exempel ovan har vi $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{x}_a = \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$. **Forward error** är lika med:

$$||\vec{x} - \vec{x}_a||_\infty = \left|\left|\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix}\right|\right|_\infty = \left|\left|\begin{bmatrix} 2 \\ -2.0001 \end{bmatrix}\right|\right|_\infty = 2.0001$$

$$||\vec{x}||_\infty = \left|\left|\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right|\right|_\infty = 1$$

Relative forward error är lika med $\frac{2.0001}{1} > 2 = 200\%$ av $||\vec{x}||_\infty$.

(5) $\boxed{\frac{\text{relative forward error}}{\text{relative backward error}} = \frac{||\vec{x}-\vec{x}_a||_\infty/||\vec{x}||_\infty}{||\vec{b}-\vec{b}_a||_\infty/||\vec{b}||_\infty} \text{ kallas för } \textbf{error magnification factor}}$

I exempel ovan **error magnification factor** är lika med:

$$\frac{2.0001}{0.0001/2.0001} > \frac{4}{0.0001} = 40000$$

4. Theorem.
Låt A vara en inverterbar matris. För alla vektorer $\vec{b}$, **error magnification factor** av $A\vec{x} = \vec{b}$ är mindre eller lika med $\text{cond}(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$. Dessutom finns det en vektor $\vec{c}$ för vilken **error magnification factor** av $A\vec{x} = \vec{c}$ är lika med $\text{cond}(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$.

Satsen säger att $\text{cond}(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$ är den största **error magnification factor** av $A\vec{x} = \vec{b}$ för alla vektorer $\vec{b}$.

I exempel ovan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{0.0001} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1.0001 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 10001 & -10000 \end{bmatrix}$$

$$||A||_\infty = 2.0001 \qquad ||A^{-1}||_\infty = 20001$$

$$\text{cond}(A) = 2.0001 \cdot 20001$$

5**. Uppgift.** Du ska lösa följande linjära ekvationssystem

$$\begin{aligned} x - 1y + z &= b_1 \\ 1x + 3y + 2z &= b_2 \\ x + 2z &= b_3 \end{aligned}$$

För att få värdena i högerledet måste du utföra mätningar. Dina mätdata är behäftade med relativt fel som är av storleksordningen 10^{-3}. Vad kommer den övre gränsen på relativa felet i lösningen bli?