22 september, 2015, Föreläsning 6

Tillämpad linjär algebra

Innehåll

- Matriser med speciella former.

Matriser med speciella former

- Diagonalmatriser
- Symmetriska matriser
- Glesa matriser
- Triangulära matriser
- Bandade matriser

1. Diagonalmatriser

Följande $n \times n$-matris kallas för en **diagonalmatris**

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Här är $d_1, d_2, \ldots, d_n$ reella tal. En diagonalmatris kan man enkelt invertera,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Varför blir det så?

2. Symmetriska matriser

En **symmetrisk matris**, A, är en matris som har egenskapen att $A^T = A$. *Vad gäller för matrisens A's storlek?*

3. Glesa matriser

En gles $n \times n$-matris är en matris som till största delen består av element som är noll. En vanlig typ av glesa matriser är bandade matriser där alla element utanför ett smalt band (av storlek m element) runt diagonalen är noll. För att matrisen ska kallas gles så bör $m << n$.

En tridiagonal $n \times n$-bandmatris, $m = 3$, ser ut på följande sätt

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & & & \\ & * & * & * & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix}$$

4. Triangulära matriser

En kvadratisk $n \times n$-matris kallas för **övertriangulär** (en. upper triangular) om alla element nedanför huvuddiagonalen är noll.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

En kvadratisk $n \times n$-matris kallas för **undertriangulär** (en. lower triangular) om alla element ovanför huvuddiagonalen är noll.

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Kan en matris vara både över- och undertriangulär samtidigt?

Triangulära matriser har följande egenskaper

(1) Produkten av två undertriangulära/övertriangulära matriser är en undertriangulär/övertriangulär matris.
(2) En triangulär matris är inverterbar om och endast om all diagonalelement är skilda från noll. *Varför är det så?*
(3) Inversen av en inverterbar under/övertriangulär matris är under/övertriangulär.

5. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifiera de listade egenskaperna (ovan) för triangulära matriser.

6. **Uppgift.** Lös $L\vec{x} = \vec{b}$ där

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

7. **Uppgift.** Lös $U\vec{x} = \vec{b}$ där

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8. **Uppgift.** Vilken form får matrisen LU om L är en undertriangulär matris och U är en övertriangulär matris?

9. **Uppgift.** Hitta alla 3×3-diagonalmatriser, D, som har egenskapen att $D^2 = DD = D$.