Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2015/2016

Modul 2
Derivata, linjär approximation, medelvärdessatsen

Denna modul omfattar kapitel 2 i kursboken Calculus av Adams och Essex och undervisas på tre föreläsningar, två övningar och ett seminarium.

Viktiga begrepp. Huvudbegreppet i denna modul är **derivata**. Begreppets betydelse slås fast i en precis definition, men oftast är det inte definitionen man använder för att räkna ut derivator. Istället använder man de **deriveringsregler** som man härleder med hjälp av definitionen: produktregeln, kvotregeln och kedjeregeln.

Med hjälp av att kunna några grundläggande funktioners derivator och att behärska deriveringsreglerna, så kan man sedan derivera väldigt många funktioner. Det är viktigt att man blir riktigt bra på att derivera, så man måste **träna mycket** på detta! I denna modul börjar vi med denna träning, men den fortsätter i kommande moduler också.

Det är viktigt också att man förstår tolkningen av derivata som ett mått på funktionens förändringstakt i en punkt och att man kan använda detta för att approximera funktionen i närliggande punkter. Det senare kallas **linjär approximation** och är mycket användbart. Ett exempel på det är när man bestämmer **tangenten** till en funktionskurva.

Den teoretiska grunden för användningen av derivata för att studera var funktioner växer respektive avtar mm utgörs av **medelvärdessatsen.** Mer om detta i modul 3 och 4.

Man bör dock observera att **inte alla funktioner är deriverbara** och att derivatans definition faktiskt ger ett villkor som avgör om funktionen är deriverbar eller inte. Det finns kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara. Se till att du kan ge exempel på sådana. Men en viktig sats säger att en funktion som är deriverbar i en punkt automatiskt är kontinuerlig i punkten. Det inte så konstigt om man man tänker på funktionsgrafen: om den har en väldefinierad lutning i en punkt så måste den väl också hänga ihop där.

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 2.1: 5, 7. Kapitel 2.2: 1, 3, 11, 26, 27, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47. Kapitel 2.3: 1, 7, 11, 17, 25, 33, 35, 47. Kapitel 2.4: 3, 5, 11, 18, 23, 30, 31, 37. Kapitel 2.5: 13, 15, 23, 29, 31, 35, 45, 62. Kapitel 2.6: 3, 9. Kapitel 2.7: 1, 3, 11, 13, 23, 29. Kapitel 2.8: 5, 13, 21, 27. Kapitel 2.9: 3, 9, 13. Kapitel 2.9: 3, 9, 13. Kapitel 2.11: 5, 7, 13, 16, 17, 18, 19.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Låt $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

A. Bestäm definitionsmängden till f.
B. I vilka punkter är f kontinuerlig?
C. Bestäm $f'(x)$.
D. I vilka punkter är f deriverbar?

Uppgift 2. Låt $g(x) = x\cos^2 x$.

A. Bestäm definitionsmängden till g.
B. I vilka punkter är g kontinuerlig?
C. Bestäm $g'(x)$.
D. I vilka punkter är g deriverbar?

Uppgift 3. Låt $h(t) = |1+t| + (1+3t^2)^{19}$.

A. Bestäm definitionsmängden till h.
B. I vilka punkter är h kontinuerlig?
C. Bestäm $h'(t)$.
D. I vilka punkter är h deriverbar?

Uppgift 4. Derivera nedanstående uttryck med avseende på x och ange i vilka punkter derivatan existerar.

A. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

B. $\sqrt{1-x}$.

C. $\sqrt{1+x^2}$.

D. $|\sin x|$

E. $\cos(\sin x^2)$

Uppgift 5. Bestäm ekvationer för tangenten och normalen i punkten $(2,3)$ till kurvan $y = x^3 - x - 3$.

Uppgift 6. Bestäm en ekvation för tangenten i punkten $(4,2)$ till kurvan $y = \sqrt{x}$. Kan du med hjälp av tangenten hitta ett närmevärde till $\sqrt{4.2}$?

Uppgift 7. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \tan x$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat $-\pi/6$.

Uppgift 8. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ strängt växande? Strängt avtagande?

Uppgift 9. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x - \tan x$ strängt växande? Strängt avtagande?

Uppgift 10. Betrakta funktionen s given av

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \le x < 2 \\ x^2, & x \ge 2 \end{cases}$$

A. I vilka punkter är funktionen deriverbar ?

B. Beräkna om möjligt $s'(1)$ och ange en ekvation för tangenten till funktionskurvan $y = s(x)$ i den punkt på kurvan där $x = 1$.

Uppgift 11. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 + y + x = 0$ i punkten $(-1, 1)$. Tips: implicit derivering.

Uppgift 12. Betrakta funktionen $f(x) = \cos x^2$. Beräkna $f^{(n)}(x)$ för $n = 1, 2, 3$.

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. Alla $x \neq (2n+1)\pi$, n godtyckligt heltal. Dvs $x \neq \pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi, \ldots$

1. B. Samma som ovan.

1. C. $f'(x) = \dfrac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \dfrac{1}{1 + \cos x}$

1. D. Samma som A och B.

2. A. Alla x

2. B. Samma svar som i 2A.

2. C. $g'(x) = \cos^2 x - 2x \cos x \sin x$

2. D. Samma svar som A och B

3. A. Definitionsmängden är alla reella tal t.

3. B. Funktionen är kontinuerlig överallt.

3. C. För $t > -1$ är $h'(t) = 1 + 114(1 + 3t^2)^{18}$. För $t < -1$ är $h'(t) = -1 + 114(1 + 3t^2)^{18}$

3. D. Funktionen är deriverbar överallt utom i punkten $t = -1$.

4. A. $\dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ definierat för $x \neq -d/c$

4. B. $-\dfrac{1}{2\sqrt{1 - x}}$ definierat för $x < 1$

4. C. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ definierat för alla x

4. D. $\cos x$ om $2n\pi < x < (2n+1)\pi$ och $-\cos x$ om $(2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi$, n godtyckligt heltal. Definierat för alla $x \neq n\pi$, n heltal.

4. E. $(\sin(\sin x^2)) \cdot (\cos x^2) \cdot 2x$, definierat för alla x

5. Tangent: $y - 3 = 11(x-2)$. Normal: $y - 3 = -\dfrac{1}{11}(x-2)$

6. $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x-4)$. Vi får $\sqrt{4.2} \approx 2.05$

7. $y + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{3}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

8. Strängt växande på intervallen $x \geq 2$ och $x \leq 0$. Strängt avtagande på intervallet $0 \leq x \leq 2$.

9. Funktionen är strängt avtagande på intervallen $\dfrac{(2n+1)\pi}{2} < x < \dfrac{(2n+3)\pi}{2}$ för godtyckligt heltal n. Funktionen är inte växande på något intervall. (Tips: $\tan x$ är inte definierat när $\cos x = 0$).

10. A. Funktionen är deriverar överallt utom i punkterna $x = 0$ och $x = 2$.

10. B. $s'(1) = 1$ och den sökta tangentens ekvation är $y = x + 2$.

11. $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x+1)$ (Tips: implicit derivering)

12. $f'(x) = -2x \sin x^2$,

$f''(x) = -2\sin x^2 - 4x^2 \cos x^2$,

$f'''(x) = -12x \cos x^2 + 8x^3 \sin x^2$