Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 1)
7 januari 2015 kl 8:00 - 13:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

(1) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y(t)y'(t) + (1 + y(t)^2)t = 0, \quad y(0) = -1.$$

(2) Samtliga lösningar till ekvationen

$$(1 - t^2)y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = 0, \quad -1 < t < 1$$

är polynom av grad ≤ 2. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen, samt den lösning som uppfyller $y(0) = 3, y'(0) = -4$.

(3) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + 4y$$

samt skissa den lösning $(x(t), y(t))$ (för $t > 0$) som uppfyller $x(0) = 1, y(0) = 0$.

(4) Lös integralekvationen

$$e^{-t} = y(t) + 2\int_0^t \cos(t - u)y(u)du$$

(5) Differentialekvationen

$$2xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0,$$

har $x = 0$ som en reguljär singulär punkt.
a) Bestäm indexekvationen samt rekursionsrelationen. (Tips: indexekvationen har en dubbelrot.) **(2p)**
b) Bestäm en (icke-trivial) serielösning ($x > 0$) till differentialekvationen. **(2p)**

Vänd!

(6) Ekvationen

$$\theta''(t) + \sin\theta(t) = 0$$

beskriver rörelsen av en pendel. Skriv om ekvationen som ett första ordningens system och avgör om den kritiska punkten $(0,0)$ (svarande mot $\theta = 0,\ d\theta/dt = 0$) är stabil eller instabil.

(7) a) Låt A vara en reell $n \times n$-matris, och låt $\mathbf{\Phi}(t)$ vara fundamentalmatrisen som uppfyller

$$\mathbf{\Phi}'(t) = A\mathbf{\Phi}(t), \quad \mathbf{\Phi}(0) = I$$

där I är identitetsmatrisen. Visa att $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(s+t)$ för alla $t, s \in \mathbb{R}$. **(3p)**

b) Bestäm $\mathbf{\Phi}(t)$ i fallet då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

och visa att $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(s+t)$ för alla $t, s \in \mathbb{R}$. **(1p)**

(8) Låt p och q vara två kontinuerliga 1-periodiska reellvärda funktioner. Visa att ekvationen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

har en 1-periodisk lösning $x(t)$ om ekvationen har en lösning $x(t)$ som uppfyller $x(0) = x(1)$.

Lycka till!