KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2015.06.10

DEL A

1. Betrakta följande punkter i rummet:

$$A = (-1, 0, 1),\ B = (1, 1, 2) \quad \text{och} \quad C = (0, 0, 2).$$

(a) Ange en parametrisk ekvation för linjen l som går genom B och C. **(1 p)**

(b) Bestäm en ekvation (normalform) för planet π som går genom A och är ortogonalt mot l. **(1 p)**

(c) Bestäm avståndet mellan A och linjen l. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Linjen l som går genom B och C har vektorn $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ som riktningsvektor.

Linjen går t.ex. genom B och har

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

som parametrisk ekvation.

(a) Eftersom planet är ortogonalt mot l är riktningsvektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en normalvektor till planet. Dessutom går planet genom A. Ekvationen blir då

$$(-1) \cdot \big(x - (-1)\big) + (-1) \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 1) = 0, \quad \text{d.v.s.} \quad x + y + 1 = 0.$$

(b) Eftersom planet är ortogonalt mot l är det eftersökta avståndet lika med avståndet mellan A och P, där P är skärningspunkten mellan planet och linjen.

$$l \cap \pi = \{ \begin{pmatrix} -t+1 \\ -t+1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ så att } -t + 1 - t + 1 + 1 = 0 \}.$$

Det följer att $t = \frac{3}{2}$ och $P = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Avståndet blir alltså

$$d(A, P) = \|\vec{AP}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. Till varje tal a har vi matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2a+2 & -2a-4 \end{bmatrix}.$$

(a) För vilka a är matrisen A inverterbar? **(2 p)**

(b) Låt $a = 3$, och bestäm inversen till A. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Genom att addera multipler av den första raden till den andra och den tredje får vi

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2a+2 & -2a-4 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 2a & -4 \end{bmatrix} \\
&= 1 \det \begin{bmatrix} 2 & -a \\ 2a & -4 \end{bmatrix} \\
&= 2(-4) - 2a(-a) \\
&= 2(a^2 - 4).
\end{aligned}$$

Determinanten $\det(A)$ är alltså noll om $a = \pm 2$, så A är inverterbar för alla a förutom dessa värden.

(b) Då $a = 3$ är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -10 \end{bmatrix}.$$

Genom radoperationer har vi

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/4 & 9/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 7/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \end{array}\right],
\end{aligned}$$

så

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 7/4 & -3/4 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

Svar.

3. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y - z, -3x - y + 2z).$$

(a) Bestäm matrisrepresentation för avbildningen T. **(1 p)**

(b) Bestäm en bas för nollrummet, $\ker(T)$. **(1 p)**

(c) Bestäm dimensionen till bildrummet till T. **(1 p)**

(d) Låt $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bestäm någon annan punkt Q sådan att $T(P) = T(Q)$. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi har

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ 2x + y - z \\ -3x - y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

så matrisrepresentationen för avbildningen T är

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Gauss-Jordan-elimination överför M_T till trappform som

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att lösningarna till ekvationssystemet

$$M_T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

för reella tal t. En bas för nollrummet till T ges alltså till exempel av vektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Dimensionen av bildrummet för T ges av rangen av matrisen M_T, vilket i sin tur ges av antalet nollskiljda rader i den reducerade trappformen. I detta fall ser vi att dimensionen av bildrummet till T är lika med 2.

(d) Vi har att $P+Q'$, med Q' i nollrummet till T har samma bild som $T(P)$. Nollrummet till T ges som $\begin{bmatrix} t & -t & t \end{bmatrix}^T$. T.ex. kan vi välja

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Svar.

DEL B

4. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm ett egenvärde som har två linjärt oberoende egenvektorer. **(2 p)**

(b) Ange alla egenvärden och avgör om matrisen A är diagonaliserbar. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Matrisen A har rank 1, uppenbarligen då

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det följer att nollrummet har dimension två. Därmed är $\lambda = 0$ ett egenvärde med två linjärt oberoende egenvektorer.

(b) Det karakteristiska polynomet till A är

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda - 5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda - 5 \end{bmatrix}.$$

Om vi adderar andra och tredje raden till den första erhåller vi

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda - 5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 15 & \lambda - 15 & \lambda - 15 \\ -5 & \lambda - 5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 15) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & \lambda - 5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 15) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 15)\lambda^2. \end{aligned}$$

Och vi har alla nollställen till det karakteristiska polynomet, $\lambda = 0$ och $\lambda = 15$. Dimensionen till deras tillhörande egenrum är lika med den algebraiska multipliciteten (2 och 1, respektivt), och det följer att matrisen är diagonaliserbar.

5. Låt V vara det linjära höljet till vektorerna $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, och låt $V^\perp$ beteckna dess ortogonala komplement.

(a) Bestäm en bas för $V^\perp$. **(2 p)**

(b) Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara speglingen i V, dvs $T(\vec{x}) = \vec{x}$ om $\vec{x}$ är i V, och $T(\vec{x}) = -\vec{x}$ om $\vec{x}$ är i $V^\perp$. Bestäm $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Rummet $V^\perp$ består av alla vektorer $\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ som är vinkelräta mot de båda vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$.Skrivet på matrisform betyder det att $\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ uppfyller

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Genom radoperationer får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

så vi ser att lösningarna är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 2t \\ 2s + \frac{5}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

för reella tal s och t. En bas för $V^\perp$ kan alltså väljas som de två vektorerna

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi normaliserar vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$, och erhåller en ON-bas för vektorrummet V,

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{n}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi låter $\vec{x} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$. Vi har att

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_V(\vec{x}) &= (\vec{n}_1 \cdot \vec{x})\vec{n}_1 + (\vec{n}_2 \cdot \vec{x})\vec{n}_2 \\
&= \frac{1}{3}(-3)\vec{n}_1 + \frac{5}{3}\vec{n}_2 \\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6+5 \\ 6+0 \\ 0+10 \\ -3+10 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Detta ger att $\vec{x} - \mathrm{proj}_V(\vec{x}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi har nu att

$$\begin{aligned}
T(\vec{x}) &= T(\mathrm{proj}_V(\vec{x})) + T(\vec{x} - \mathrm{proj}_V(\vec{x})) \\
&= -\mathrm{proj}_V(\vec{x}) + \vec{x} - \mathrm{proj}_V(\vec{x}) \\
&= -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -13 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(b') *Alternativt:* Vi har en bas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ för V, och en bas $\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ för $V^\perp$. Vi bestämmer koordinatmatrisen för $\vec{x} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ i basen $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4\}$. Detta leder till ett linjärt ekvationssystem, vars totalmatris ï

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Vi utför elementära radoperationer

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} \end{array}\right].$$

Detta ger att

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{9}\vec{v}_1 + \frac{5}{9}\vec{v}_2 - \frac{1}{9}\vec{v}_3 + \frac{1}{9}\vec{v}_4.$$

Och speciellt har vi att

$$T(\vec{x}) = \frac{3}{9}\vec{v}_1 - \frac{5}{9}\vec{v}_2 - \frac{1}{9}\vec{v}_3 + \frac{1}{9}\vec{v}_4 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -13 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Svar.

6. Bestäm en symmetrisk matris A som satisfierar följande.
   (a) Egenrummet tillhöranda egenvärdet $\lambda = 2$ är $\begin{bmatrix} 2t & t & -t \end{bmatrix}^T$, godtyckliga tal t.
   (b) Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 4$ har dimension två. **(4 p)**

Lösningsförslag. Villkoret (a) ger att $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till A med egenvärdet 2. Vi har från boken att egenvektorer tillhörande olika egenvärden, av en symmetrisk matris är ortogonala. Detta betyder att egenrumme tillhörande egenvärdet 4 är ortogonal till $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Med andra ord att egenrummet E_4 ges av planet $2x + y - z = 0$. Vi väljer en ortogonal bas $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ för planet;

$$u := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad w := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi behöver inte välja en ortogonal bas, men detta val kommer att göra våra beräkningar nedan enklare. I basen $\{v, u, w\}$ blir matrisrepresentationen av vår tänkta avbildning lika med

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Den sökta matrisen A är matrisrepresentationen av avbildningen i standardbasen. Detta betyder att

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Innan vi börjar bestämma inversmatrisen, noterar vi följande.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Detta ger att den sökta inversmatrisen är följande produkt

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi insätter detta i vårt uttryck för matrisen A, och erhåller att

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{-4}{3} \\ \frac{-1}{3} & 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 11 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

DEL C

7. Bestäm den räta linje L som går genom punkten $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, och som skär de båda linjerna

(4 p)

$$L_1 = \{ \begin{bmatrix} 3t \\ t \\ t+1 \end{bmatrix} \mid \text{tal } t\} \quad \text{och} \quad L_2 = \{ \begin{bmatrix} s \\ s+4 \\ 2s \end{bmatrix} \mid \text{tal } s\}.$$

Lösningsförslag. Riktningsvektorn från punkten P till en punkt Q på linjen L_1 är $Q - P = \begin{bmatrix} 3t-1 & t-1 & t \end{bmatrix}^T$. Och liknande blir $\begin{bmatrix} s-1 & s+3 & 2s-1 \end{bmatrix}^T$ riktningsvektor från P till en punkt på linjen L_2. För att bestämma L måste vi bestämma talen s och t sådan att vektorerna $\begin{bmatrix} 3t-1 \\ t-1 \\ t \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} s-1 \\ s+3 \\ 2s-1 \end{bmatrix}$ är parallella. Att vektorerna är parallella betyder att det finns λ som löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3t\lambda - \lambda &= s-1 \\ t\lambda - \lambda &= s+3 \\ t\lambda &= 2s-1. \end{cases}$$

Om vi subtraherar den andra ekvationen från den första, får vi att $2t\lambda = -4$. Detta ger $t\lambda = -2$. Den tredje ekvationen ger $-2 = 2s - 1$, alltså att $s = \frac{-1}{2}$. Vi kan använda den andra ekvationen att få $-2 - \lambda = \frac{-1}{2} + 3$ som ger $\lambda = \frac{-9}{2}$. Alltså $t = \frac{4}{9}$. Man verifierar att $\lambda = \frac{-9}{2}$, $t = \frac{4}{9}$ och $s = \frac{-1}{2}$ också uppfyller den första ekvationen.

Vi konstaterar därmed att $\begin{bmatrix} s-1 \\ s+3 \\ 2s-1 \end{bmatrix}$, med $s = \frac{-1}{2}$, är en riktningsvektor till L. Denna vektor har koordinater $\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$, och därför är också $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ en riktningsvektor till L.

Linjen L är $\begin{bmatrix} -3t+1 \\ 5t+1 \\ -4t+1 \end{bmatrix}$, med godtyckligt tal t.

Svar.

8. Låt $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{R}^n$ vara en uppsättning delrum till $\mathbb{R}^n$ sådana att V_k har dimension k för varje k och V_{k-1} är ett delrum till V_k för varje $k \geq 2$. En sådan uppsättning delrum kallas en *flagga*. Låt $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning som *stabiliserar* flaggan. Med det menas att för varje $k = 1, 2, \ldots, n$ och för varje vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gäller implikationen $v \in V_k \Rightarrow T(v) \in V_k$. Låt nu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ sådana att $\operatorname{span}\{v_1, v_2 \ldots, v_k\} = V_k$ för varje k. Visa att matrisen för T med avseende på basen $v_1, v_2 \ldots, v_n$ är övertriangulär. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt B vara matrisen för T med avseende på basen $v_1, v_2, \ldots, v_n$. För varje $k = 1, 2, \ldots, n$ gäller att v_k tillhör V_k eftersom $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = V_k$. Eftersom T stabiliserar flaggan följer av detta att även $T(v_k)$ tillhör V_k, så $T(v_k)$ kan skrivas som en linjärkombination $b_{1,k}v_1 + b_{2,k}v_2 + \cdots + b_{k,k}v_k$ av $v_1, v_2, \ldots, v_k$, där $b_{1,k}, b_{2,k}, \ldots, b_{k,k}$ är reella tal. Med avseende på basen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ har v_k och $T(v_k)$ koordinatvektorerna

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{respektive} \quad \begin{bmatrix} b_{1,k} \\ b_{2,k} \\ \vdots \\ b_{k,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

där den ensamma ettan står på rad k. Vi drar slutsatsen att

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

och alltså är B övertriangulär.

9. Matrisen

$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

har egenvektorer $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ med tillhörande egenvärden

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{7+\sqrt{57}}{20}, \quad \text{och} \quad \lambda_3 = \frac{7-\sqrt{57}}{20}.$$

Låt $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vara en vektor med positiva koefficienter $a \geq 0, b \geq 0$ och $c \geq 0$ sådana att $a+b+c=1$. Bestäm punkten A^nX, när $n \to \infty$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi har tre olika egenvärden, och vet därmed att egenvektorerna $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, och $\vec{x}_3$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$. Skriv X som linjär kombination $X = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3$. Från linjäriteten av A^n får vi att

$$\begin{aligned} A^nX &= \alpha_1 A^n\vec{x}_1 + \alpha_2 A^n\vec{x}_2 + \alpha_3 A^n\vec{x}_3 \\ &= \alpha_1\lambda_1^n\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\vec{x}_2 + \alpha_3\lambda_3^n\vec{x}_3. \end{aligned}$$

Vi har att $|7+\sqrt{57}| < 20$ och $|7-\sqrt{57}| < 20$. Detta betyder att λ_2 och λ_3 har belopp äkta mindre än 1, och när $n \to \infty$ då vill $\lambda_2^n \to 0$ och $\lambda_3^n \to 0$. Detta betyder att $A^nX \to \alpha_1\vec{x}_1$ när $n \to \infty$. Vi vill nu bestämma linjen som egenvektorn $\vec{x}_1$ spänner upp. Egenvektorn $\vec{x}_1$ ges av det homogena ekvationssystemet som tillsvarar matrisen

$$A - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -7 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Gauss-Jordan elimination ger

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord, egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda_1 = 1$ är vektorerna $\begin{bmatrix} \frac{2}{3}t \\ \frac{2}{3}t \\ t \end{bmatrix}$ med godtyckliga tal t.

Vi noterar sedan att varje kolumn i matrisen A summerar till ett. Detta betyder att om vi har en vektor $X = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ där $a+b+c=1$, då vill också koefficienterna till AX summera till ett;

$$AX = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3a+b+4c \\ 2a+8b \\ 5a+b+6c \end{bmatrix},$$

och vi har att

$$\frac{1}{10}(3a+b+4c+2a+8b+5a+b+6c) = \frac{1}{10}10(a+b+c) = 1.$$

Detta betyder att matrisen A avbildar planet $x+y+z=1$ i sig själv. Vi använder nu dessa två egenskaper vi har kunnat konstatera. Det ena är att att A^nX konvergerar mot linjen $\mathrm{Span}(\vec{x}_1)$, och det andra är att koefficienterna till vektorn A^nX vill vara positiva, och summera till ett.

En punkt på linjen $\mathrm{Span}(\vec{x}_1)$ är på formen, $\begin{bmatrix} \frac{2}{3}t \\ \frac{2}{3}t \\ t \end{bmatrix}$, och kravet att koefficienterna är positiva och summerar till 1 ger att $t = \frac{3}{7}$. Vi har visat att vektorn A^nX vill konvergera mot punkten

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$