



SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2015-06-04

DEL A

1. Funktionen f är definierad på området som ges av olikheterna $x > 1/2$ och $y > 0$ genom

$$f(x, y) = \ln(2x - 1) + \ln(y) - xy - x.$$

- (a) Förklara vad det innebär att en punkt är en *stationär punkt*¹ för funktionen f och kontrollera att $(1, 1)$ är en sådan punkt. **(1 p)**
- (b) Skriv upp Taylorutvecklingen till f av ordning två i punkten $(1, 1)$. **(2 p)**
- (c) Avgör vilken typ den stationära punkten $(1, 1)$ har. **(1 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Att en punkt är *stationär* innebär att gradienten för funktionen är noll i den punkten. I vårt fall är gradienten

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(\frac{2}{2x - 1} - y - 1, \frac{1}{y} - x \right)$$

och när vi beräknar det för $(x, y) = (1, 1)$ får vi

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{2}{2 \cdot 1 - 1} - 1 - 1, \frac{1}{1} - 1 \right) = (2 - 1 - 1, 1 - 1) = (0, 0).$$

Alltså är $(1, 1)$ en stationär punkt.

- (b) För Taylorpolynomet av grad två behövs andraderivatorna av f och dessa ges av

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4}{(2x - 1)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

I punkten $(x, y) = (1, 1)$ får vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1.$$

¹En stationär punkt kallas också för en *kritisk punkt*.

Värdet i punkten $(1, 1)$ är $f(1, 1) = 0 + 0 - 1 - 1 = -2$ och eftersom det är en stationär punkt är den linjära termen noll. Därmed ges Taylorpolynomet kring punkten $(1, 1)$ av

$$p(x, y) = -2 + (-4)\frac{(x-1)^2}{2} - (x-1)(y-1) - \frac{(y-1)^2}{2}$$

(c) Typen för den stationära punkten bestäms av andragradstermen som kan skrivas som

$$\frac{1}{2}(-4h^2 - 2hk - k^2) = -\frac{1}{2}(3h^2 + (h+k)^2)$$

som är negativt definit. Därmed är $(1, 1)$ ett lokalt maximum. Vi kan också se detta genom att se på egenvärdena till matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

I och med att determinanten är $4 - 1 = 3$ som är positiv har båda egenvärdena samma tecken och i och med att spåret är negativt måste de båda vara negativa och vi drar åter igen slutsatsen att formen är negativt definit och $(1, 1)$ en lokal maxpunkt.

Svar.

(b) Taylorpolynomet är $p(x, y) = -2 + (-4)\frac{(x-1)^2}{2} - (x-1)(y-1) - \frac{(y-1)^2}{2}$.

(c) Punkten $(1, 1)$ är ett lokalt maximum.

2. Låt $\mathbf{r}(t)$ beskriva en partikels position i xy -planet där den rör sig moturs med en konstant vinkelhastighet om ω radianer per sekund i en cirkel med radie R kring origo.
- (a) Skriv upp uttrycket för $\mathbf{r}(t)$ om partikeln vid tiden $t = 0$ s befinner sig i punkten $(R, 0)$. **(1 p)**
- (b) Beräkna derivatan $\mathbf{r}'(t)$ med hjälp av uttrycket från del (a). **(1 p)**
- (c) Arbetet som utförs av en kraft $\mathbf{F}(t)$ under rörelsen ges av $\int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r}$. Newtons andra lag säger att den kraft som verkar på partikeln är $m\mathbf{r}''(t)$, där m är partikelns massa. Vilket arbete utför denna kraft medan partikeln färdas ett halvt varv kring origo? **(2 p)**

Lösningförslag.

- (a) Om vi använder polära koordinater har vi $r = R$ och $\theta = \omega t$ och när vi skriver det i rektangulära koordinater får vi

$$\mathbf{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t)).$$

- (b) Vi deriverar $\mathbf{r}(t)$ med avseende på t och får

$$\mathbf{r}'(t) = (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t)).$$

- (c) Arbetet ges av

$$\int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = 0$$

eftersom

$$\mathbf{r}''(t) = (-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t))$$

som är vinkelrät mot $\mathbf{r}'(t)$ för alla t .

Svar.

- (a) $\mathbf{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t))$.
 (b) $\mathbf{r}'(t) = (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t))$.
 (c) Arbetet är noll.

3. Betrakta den kropp K i rummet som ges av olikheterna

$$0 \leq z \leq x^2 + 4y^2 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Volymen av kroppen kan beräknas med trippelintegralen

$$\iiint_K 1 \, dV = \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz.$$

- (a) Ställ upp den trippelintegral som ger volymen av K med upprepad integration i de rätvinkliga koordinaterna x , y och z . **(1 p)**
 (b) Utför det variabelbyte som krävs för att beräkna trippelintegralen från del (a) med hjälp av *cylinderkoordinater*. **(1 p)**
 (c) Beräkna volymen av K , exempelvis genom att beräkna trippelintegralen från del (b). **(2 p)**

Lösningförslag.

- (a) Vi kan beskriva cirkeln med olikheterna $-1 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ och därmed kan trippelintegralen skrivas som

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+4y^2} 1 \, dz \, dy \, dx.$$

- (b) Vid variabelbytet till cylinderkoordinater $[r, \theta, z]$ fås $dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz$ och kroppen ges av olikheterna $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq z \leq r^2(\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)$. Därmed blir integralen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2(\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

- (c) Vi beräknar integralen från del (b) som

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \int_0^{2\pi} \int_0^1 r [z]_0^{r^2(\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) \, dr \, d\theta = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) \, d\theta = \frac{1}{4} \cdot 5\pi = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

Svar.

- (a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+4y^2} 1 \, dz \, dy \, dx$.
 (b) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2(\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)} r \, dz \, dr \, d\theta$.
 (c) Volymen är $5\pi/4$.

DEL B

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, y^3 + x^2z)$ ut genom begränsningsytan till den cylinderformade kropp K som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad 0 \leq z \leq 1$$

antingen genom att parametrisera ytans olika delar eller genom att använda divergenssatsen. **(4 p)**

Lösningförslag. Om vi väljer att använda divergenssatsen ser vi först att

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = y + z + x^2.$$

och eftersom \mathbf{F} är kontinuerligt deriverbart och begränsningsytan till K är styckvis slät får vi

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \int_K (x^2 + y + z) \, dx dy dz.$$

Vi kan sedan byta till cylinderkoordinater och får

$$\int_K (x^2 + y + z) \, dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta + z) r \, dr d\theta dz$$

Varje term kan beräknas som en produkt.

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta \, dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^1 1 \, dz = \pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta r \, dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^1 1 \, dz = [-\cos \theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \cdot 1 = 0$$

och

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 zr \, dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \int_0^1 r \, dr \int_0^1 z \, dz = 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Sammantaget får vi

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta + z) r \, dr d\theta dz = \frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Väljer vi istället att parametrisera ytans delar får vi tre olika delar. Vi börjar med mantelytan som kan parametriseras med $\mathbf{r}(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$. En utåtriktad normerad

normalvektor ges av $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ och därför ges flödet av integralen

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos \theta \sin \theta, z \sin \theta, \sin^3 \theta + z \cos^2 \theta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) \, dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 \theta \sin \theta + z \sin^2 \theta \, dz d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \int_0^1 dz + \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \int_0^1 z \, dz \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} \cdot 1 + \pi \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Bottenytan är en cirkelskiva som parametreras av $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ och en utåtriktad normerad normalvektor är $(0, 0, -1)$. Därmed blir flödet genom denna del

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos \theta \sin \theta, 0, r^3 \sin^3 \theta) \cdot (0, 0, -1) r \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^3 \sin^3 \theta r \, dr d\theta \\ &= - \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^{2\pi} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta = -\frac{1}{5} \cdot \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Slutligen ges den övre begränsningsytan av $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1)$. En utåtriktad normerad normalvektor ges av $(0, 0, 1)$ och därför ges flödet av integralen

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos \theta \sin \theta, r \sin \theta, r^3 \sin^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta) \cdot (0, 0, 1) r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta r \, dr d\theta \end{aligned}$$

Den första termen är noll enligt den förra beräkningen och den andra ger

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta r \, dr d\theta = \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \, d\theta = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Sammataget blir flödet

$$\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Svar. Flödet genom ytan är $3\pi/4$.

5. För att flyga med flygbolaget *Lagrangian Airlines* krävs att det incheckade bagagets ytermått skall uppfylla att summan av dess höjd, bredd och djup inte överskrider 150 cm. Bestäm den maximala volym som en rätvinklig parallelepiped kan ha för att få tas med som incheckat bagage. **(4 p)**

Lösningförslag. Vi behöver maximera volymen $V(x, y, z) = xyz$ av ett rätblock med höjd x , bredd y och längd z givet att $x, y, z \geq 0$ cm och $x + y + z \leq 150$ cm. Detta måste finnas ett maximum för funktionen eftersom den är deriverbar och definierad på en kompakt mängd. Vi börjar med att leta efter maximum bland stationära punkter till $V(x, y, z)$. Dessa ges av lösningar till $\text{grad } V(x, y, z) = (0, 0, 0)$, dvs

$$\begin{cases} yz = 0, \\ xz = 0, \\ xy = 0, \end{cases}$$

vilket ger att $V(x, y, z) = xyz = x(yz) = x \cdot 0 = 0$. Detta kan inte vara maximum eftersom V kan anta positiva värden. Vi ser sedan på randen som ges av tre delar där en av variablerna är noll och en triangel där $x + y + z = 150$ cm. På delarna där en variabel är noll är också volymen noll, vilket återigen inte kan vara maximum. Vi ser till slut på den del av randen där $x + y + z = 150$ cm. Enligt Lagranges metod ska gradienten till V vara parallell med gradienten till bivillkoret vid ett optimum. I det här fallet ska alltså (yz, xz, xy) vara parallell med $(1, 1, 1)$, vilket ger $x = y = z$ som med bivillkoret $x + y + z = 150$ cm ger $x = y = z = 50$ cm. Då blir volymen $(50 \text{ cm})^3 = 125\,000 \text{ cm}^3 = 125 \text{ dm}^3$. Detta måste vara det eftersökta maximala värdet för volymen.

Svar. Den maximala volymen är 125 dm^3 , dvs 125 liter.

6. I en enkel modell av ett gasmoln antas det utanför klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ha en masstäthet som i lämpliga enheter ges av

$$f(x, y, z) = K \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Beräkna gasmolnets totala massa.

(4 p)

Lösningförslag. Beteckna området klotet för Ω . Vi behöver beräkna integralen

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = K \iiint_{\Omega} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz.$$

Vi går över till sfäriska koordinater $[r, \phi, \theta]$ och får

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{och} \quad dx \, dy \, dz = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta.$$

Integrationsgränserna är

$$1 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad \text{och} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Integralen är generaliserad eftersom området inte är begränsat. Eftersom integranden är positiv räcker det att låta den övre integrationsgränsen för r gå mot oändligheten och ta gränsvärde. Alltså blir massan

$$\begin{aligned} m &= \lim_{R \rightarrow \infty} K \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^R \frac{e^{-r^2}}{r} \cdot r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= K \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi \int_1^R r e^{-r^2} \, dr \\ &= 2\pi K [-\cos \phi]_0^{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_1^R \\ &= 2\pi K \cdot (1 - (-1)) \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} - \left(-\frac{e^{-1}}{2} \right) \right) = \frac{2\pi K}{e}, \end{aligned}$$

där vi har använt att $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$.

Svar. Klotets massa är $2\pi K/e$.

DEL C

7. Låt K vara den homogena kropp som beskrivs av olikheterna

$$z \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{och} \quad z^2 \geq x^2 + y^2.$$

Beräkna z -komponenten av masscentrum för kroppen K .

(4 p)

Lösningförslag. För att beräkna z -komponenten för masscentrum behöver vi beräkna kvoten

$$\frac{\iiint_K z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz}.$$

För båda integralerna är det lämpligt att använda cylinderkoordinater och gränserna för K ges då av $r^2 \leq z^2 \leq 4 - r^2$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$. För att $r^2 \leq 4 - r^2$ måste $r \leq \sqrt{2}$. Den första integralen blir därmed

$$\begin{aligned} \iiint_K z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} z r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{rz^2}{2} \right]_r^{\sqrt{4-r^2}} dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{r(4-r^2) - r^3}{2} \right) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3) dr = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(2 - \frac{4}{4} \right) = 2\pi \end{aligned}$$

Den andra integralen blir

$$\begin{aligned} \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} [rz]_r^{\sqrt{4-r^2}} dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r\sqrt{4-r^2} - r^2) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2\pi \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3} + 0 \right) = 2\pi \cdot \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Därmed blir z -komponenten av masscentrum

$$\frac{\iiint_K z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot \frac{8-4\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{8-4\sqrt{2}} = \frac{3(8+4\sqrt{2})}{64-32} = \frac{3(2+\sqrt{2})}{8}$$

I den ursprungliga tentamenslydelsen fattades olikheten $z \geq 0$ då blir kroppen K symmetrisk kring $z = 0$ vilket gör att kroppens masscentrum hamnar vid $z = 0$ av symmetriskäl.

Svar. z -komponenten av kroppens masscentrum är $3(2 + \sqrt{2})/8$.

8. Beträkta den vektorvärda funktionen \mathbf{f} som ges av

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(xy, \frac{x^2 - y^2}{2} \right)$$

för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Punkten $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ är en *fixpunkt* till \mathbf{f} , vilket betyder att $\mathbf{f}(\sqrt{3}, 1) = (\sqrt{3}, 1)$. För varje positivt heltal n kan vi bilda funktionen \mathbf{f}_n genom att sätta samman \mathbf{f} med sig själv n gånger, dvs $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{f}$, etc.

- (a) Bestäm Jacobimatrisen $D\mathbf{f}$ i fixpunkten $(\sqrt{3}, 1)$. (1 p)
 (b) Visa att $(\sqrt{3}, 1)$ är en fixpunkt för alla funktionerna \mathbf{f}_n , för $n \geq 1$. (1 p)
 (c) Bestäm ett uttryck för Jacobimatrisen $D\mathbf{f}_n$ i fixpunkten $(\sqrt{3}, 1)$ som gäller för alla $n \geq 1$. (2 p)

Lösningförslag.

(a) Jacobimatrisen ges av

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix}$$

och när vi sätter in $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ får vi

$$D\mathbf{f}(\sqrt{3}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom vi har att $\mathbf{f}(\sqrt{3}, 1) = (\sqrt{3} \cdot 1, ((\sqrt{3})^2 - 1)/2) = (\sqrt{3}, 1)$ har vi att $\mathbf{f}_{n+1}(\sqrt{3}, 1) = \mathbf{f}_n(\mathbf{f}(\sqrt{3}, 1)) = \mathbf{f}_n(\sqrt{3}, 1)$ för alla $n \geq 1$. Därmed får vi

$$\mathbf{f}_n(\sqrt{3}, 1) = \mathbf{f}_{n-1}(\sqrt{3}, 1) = \dots = \mathbf{f}_1(\sqrt{3}, 1) = (\sqrt{3}, 1).$$

(c) Kedjeregeln säger att Jacobimatrisen för en sammansättning är matrisprodukten av Jacobimatrisserna. Eftersom $(\sqrt{3}, 1)$ är en fixpunkt beräknas alla Jacobimatrisserna i samma punkt och vi får

$$D\mathbf{f}_n(\sqrt{3}, 1) = (D\mathbf{f}(\sqrt{3}, 1))^n = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^n.$$

Vi har att

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

och därmed har vi

$$D\mathbf{f}_n(\sqrt{3}, 1) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1}\sqrt{3} \\ 2^{n-1}\sqrt{3} & -2^{n-1} \end{bmatrix} & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$

Detta kan också skrivas som

$$\begin{aligned} D\mathbf{f}_n(\sqrt{3}, 1) &= 2^{n-2} \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} + (-2)^{n-2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \\ &= 2^{n-2} \begin{bmatrix} 3 + (-1)^n & (1 - (-1)^n)\sqrt{3} \\ (1 - (-1)^n)\sqrt{3} & 1 + 3(-1)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Svar.

(a) Jacobimatrisen är $D\mathbf{f}(\sqrt{3}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Jacobimatrisen för sammansättningen \mathbf{f}_n är

$$D\mathbf{f}_n(\sqrt{3}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^n = 2^{n-2} \begin{bmatrix} 3 + (-1)^n & (1 - (-1)^n)\sqrt{3} \\ (1 - (-1)^n)\sqrt{3} & 1 + 3(-1)^n \end{bmatrix}.$$

9. Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där vektorfältet \mathbf{F} ges av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + 4y)$$

och C är kurvan som ges av

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(1 - t^2), t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(4 p)

Lösningförslag. Vi kan se att fältet inte är konservativt genom att beräkna rotationen som ger

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (4 - 1, 1 - 1, 1 - 1) = (3, 0, 0),$$

men vi kan dela upp fältet i en summa av ett konservativt fält \mathbf{G} och ett fält $\mathbf{H} = (0, 0, 3y)$. Kurvintegralen över det först fältet kan beräknas med hjälp av en potential och den andra kan beräknas direkt eftersom den unviker x -komponenten av kurvan. En potential för $\mathbf{G}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ ges av $\Phi(x, y, z) = xy + yz + zx$ och eftersom kurvan går från $(0, 0, 0)$ till $(1, 1, 1)$ blir kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, 1, 1) - \Phi(0, 0, 0) = 3 - 0 = 3.$$

Den andra kurvintegralen ges av

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_C 3y \, dz = \int_0^1 3t^2 \, dt = [t^3]_0^1 = 1.$$

Sammantaget får vi kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 3 + 1 = 4.$$

Det går också att beräkna integralen direkt som

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2 + t)(\cos(1 - t^2) + 2t^2 \sin(1 - t^2) + (t \cos(1 - t^2) + t) \cdot 2t + t \cos(1 - t^2) + 4t^2) \, dt \\ = \int_0^1 (3t^2 + 2t) \cos(1 - t^2) + 2(t^4 + t^3) \sin(1 - t^2) + 6t^2 \, dt \\ = \int_0^1 (3t^2 + 2t) \cos(1 - t^2) + (t^3 + t^2)2t \sin(1 - t^2) + 6t^2 \, dt \\ = [(t^3 + t^2) \cos(1 - t^2) + 2t^3]_0^1 = 2 + 2 - 0 - 0 = 4 \end{aligned}$$

där vi använt att derivatan av $\cos(1 - t^2)$ är $2t \sin(1 - t^2)$.

Svar. Kurvintegralen är $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4$.
