KTH Teknikvetenskap

SF1668 Matematisk och numerisk analys 1
Lösningsförslag till tentamen 2014-04-07

DEL A

1. Låt $f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$.
   A. Bestäm definitionsmängden till funktionen f.
   B. Bestäm funktionens största och minsta värde.

(Om du har glömt bort derivatan av arcsin x så kan du härleda den genom implicit derivering av sambandet $\sin(\arcsin x) = x$. *Om du minns den behöver du inte härleda den.)*

Lösning. A. Definitionsmängden är den största möjliga mängd av reella tal x för vilka $f(x)$ är definierat och reellt. Eftersom både $\arcsin x$ och rotuttrycket är definierat för x i intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och inga andra, så är det definitionsmängden för f. Dvs definitionsmängden består av de reella tal x som uppfyller att $-1 \leq x \leq 1$.

B. Eftersom f är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet $-1 \leq x \leq 1$ måste f anta både ett största och ett minsta värde och dessa måste antas i punkter som är kritiska punkter (där derivatan är noll) eller singulära punkter (där derivata saknas) eller ändpunkter till intervallet. Ändpunkterna är ± 1. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2 \cdot (-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}},$$

som existerar för alla x sådana att $-1 < x < 1$. Vi ser att $f'(x) = 0 \iff x = 1/2$. Detta är alltså den enda kritiska punkten. Singulära punkter i det inre av intervallet saknas.

Det följer av ovanstående att största och minsta värdet måste antas i några av punkterna -1, 1 och $1/2$. Eftersom

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad f(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad f(1/2) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{6}$$

så ser vi att största värdet är $f(1/2) = \frac{\pi+3\sqrt{3}}{6}$ och minsta värdet är $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

$\square$

Svar: A. Definitionsmängden består av alla reella tal x som uppfyller att $-1 \leq x \leq 1$.
B. Största värdet är $f(1/2) = \frac{\pi+3\sqrt{3}}{6}$ och minsta värdet är $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

2. Avgör om det är sant att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < 2.$

Lösning. Denna uppgift kan lösas på många olika sätt. Här är tre olika möjliga lösningar:

1. Eftersom $e^{-|x|} \leq 1$ med likhet bara då $x = 0$ så är $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = 2.$

2. Vi har att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx = \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{-x}\,dx = [e^x]_{-1}^{0} + [-e^{-x}]_{0}^{1} = 2 - \frac{2}{e} < 2.$

3. Eftersom integrationsintervallet är symmetriskt runt origo och $e^{-|x|}$ är en jämn funktion (dvs $e^{-|-x|} = e^{-|x|}$) så gäller att

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx = 2 - \frac{2}{e} < 2$$

$\square$

Svar: Det är sant att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < 2.$

3. Odämpad svängning beskrivs av differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

där $y(t)$ är avvikelsen från jämviktsläget vid tidpunkten t och ω är en konstant.
   A. Lös differentialekvationen om $\omega = 4$.
   B. Finn den lösning till differentialekvationen (fortfarande med $\omega = 4$) som också uppfyller att $y(0) = -6$ och $y'(0) = 32$.
   C. Bestäm perioden och amplituden hos din lösning.

Lösning. A. När $\omega = 4$ får vi diffekvationen $y'' + 16y = 0$. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 16 = 0$ har lösning $r = 4i$ så diffekvationens lösning är

$$y(t) = a\cos 4t + b\sin 4t, \quad \text{för godtyckliga konstanter } a, b.$$

B. Vi väljer konstanterna så att villkoren uppfylls. Vi ser att $y(0) = -6$ ger att $a = -6$ och $y'(0) = 32$ ger att $4b = 32$ dvs $b = 8$. Så den lösning till diffekvationen som uppfyller villkoren är alltså

$$y(t) = -6\cos 4t + 8\sin 4t.$$

C. Eftersom $\sin t$ och $\cos t$ är periodiska med perioden 2π så är $y(t) = -6\cos 4t + 8\sin 4t$ periodisk med perioden $\pi/2$. Amplituden är maxvärdet av $|-6\cos 4t + 8\sin 4t|$ dvs 10. □

Svar: A. $y(t) = a\cos 4t + b\sin 4t$, där a och b är godtyckliga konstanter.
   B. $y(t) = -6\cos 4t + 8\sin 4t$.
   C. Period $\pi/2$ Amplitud 10

DEL B

4. A. Använd trapetsmetoden med två delintervall, dvs. med steglängd $h = 1$, för att approximera arean av det område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}$ för x i intervallet $0 \le x \le 2$.
   B. Skriv ett Matlab-program som beräknar en approximation av arean med trapetsmetoden och steglängden $h = 0.01$.

   Lösning. A. Arean som ska approximeras ges av

$$A = \int_0^2 \Big(\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3} - 1\Big)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx.$$

   Om vi kallar integranden för $y(x)$ ger trapetsmetoden approximationen

$$T_2 = h(\frac{1}{2}y(0) + y(1) + \frac{1}{2}y(2)) = 1\Big(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2\cdot 15}\Big) = \frac{13}{40}.$$

   B.

```
h=0.01;

x=0:h:2;

y=1./(x.^2+4*x+3);

T=h*(y(1)/2+sum(y(2:end-1))+y(end)/2);

disp(['Approximationen av arean: ',num2str(T)])
```

□

5. Låt $f(x) = 1 - (x-1)^2,\ \ 0 \le x \le 2$. Gör en enkel skiss av funktionsgrafen $y = f(x)$ och finn den punkt (x_0, y_0) på funktionsgrafen som gör arean av triangeln med hörn i $(0,0)$, $(x_0, 0)$ och (x_0, y_0) maximal.

Lösning. Grafen är en andragradskurvan och vi ser direkt att högsta punkten på kurvan är punkten $(1,1)$ eftersom största värdet av f är $f(1) = 1$. Kurvan skär x-axeln i $x = 0$ och $x = 2$.

Triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(x,0)$ och (x,y) har area $\dfrac{xy}{2}$ vilket kan skrivas $\dfrac{x(1-(x-1)^2)}{2}$ eftersom (x,y) ska vara en punkt på grafen. Vi ska alltså maximera funktionen

$$A(x) = \frac{x(1-(x-1)^2)}{2}, \quad \text{då} \quad 0 \le x \le 2.$$

Funktionen A är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet, varför ett max säkert finns. Detta kan antas i ändpunkterna eller i en kritisk punkt i det inre av intervallet (singulära punkter finns inte då A är ett polynom). Vi dervierar och får

$$A'(x) = \frac{1-(1-x)^2 + 2x(1-x)}{2} = \frac{4x - 3x^2}{2}.$$

Vi ser att $A'(x) = 0 \iff x = 0$ eller $x = 4/3$. Vi har alltså tre möjliga punkter, dvs $x = 0$, $x = 4/3$ och $x = 2$, där maximum kan antas. Vi vet att max antas i någon av dem. Eftersom

$$A(0) = 0, \quad A(4/3) = \frac{16}{27} \quad \text{och} \quad A(2) = 0,$$

så är maximala arean $16/27$, som inträffar när $x = 4/3$ och $y = 8/9$ Den punkt på funktionsgrafen som söks i uppgiften är alltså punkten $(4/3, 8/9)$.

$\square$

Svar: $(4/3, 8/9)$.

6. Beräkna, t ex med hjälp av variabelsubstitution eller partiell integration, integralen

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

Lösning. Integralen går att beräkna på flera olika sätt. T ex dessa två:

1. Med partiell integration får vi

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx &= \left[\frac{-x(1-x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{3/2}}{3/2}\,dx \\ &= \left[\frac{-(1-x)^{5/2}}{(3/2)(5/2)}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

2. Med variabelsubstitutionen $\sqrt{1-x} = u$ får vi (obs att $x = 1-u^2$ och $dx = -2udu$ med nya gränser 1 och 0):

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx &= \int_1^0 (1-u^2)u(-2u)\,du \\ &= \int_0^1 2u^2(1-u^2)\,du = \cdots = \frac{4}{15}\end{aligned}$$

$\square$

Svar: $4/15$

DEL C

7. A. Formulera differentialkalkylens medelvärdessats.
   B. Använd den för att visa att en funktion vars derivata är noll i ett öppet intervall måste vara konstant i intervallet.

Lösning. Se läroboken sats 11 och sats 13 i kapitel 2.8.

A. Om f är en funktion som är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar på det öppna intervallet (a, b) så finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

B. Anta att funktionen f har en derivata som existerar och är noll för alla punkter i ett visst öppet intervall. Ta en punkt i intervallet och kalla den a. Ta sedan en annan punkt, vilken som helst, i intervallet, kalla den b. Eftersom dessa punkter ligger i ett intervall där f är deriverbar, är förutsättningarna för medelvärdessatsen uppfyllda och det följer att det finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Men c ligger i det intervall vi började med där enligt antagande derivatan är noll överallt, så $f'(c) = 0$. Det måste alltså gälla att $f(b) - f(a) = 0$ eller med andra ord att $f(b) = f(a)$. Eftersom b var godtyckligt vald vet vi nu att funktionsvärdet i vilken punkt som helst i intervallet är lika med funktionsvärdet i punkten a. Dvs funktionen är konstant och har värdet $f(a)$ i alla punkter i intervallet. □

Svar:

8. Låt f vara en tre gånger deriverbar funktion på intervallet $[-1, 2]$, sådan att $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 6$ och $|f'''(x)| \leq 1$ för alla x i intervallet. Visa att

$$1 - \frac{1}{24} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1 + \frac{1}{24}.$$

Lösning. Med hjälp av Taylors formel och det vi vet om f har vi att för x mellan -1 och 2 är

$$f(x) = 3x^2 + E(x), \quad \text{där } |E(x)| \leq \frac{x^3}{6}.$$

Det följer av detta att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (3x^2 + E(x))\,dx = 1 + \int_0^1 E(x)\,dx.$$

Eftersom

$$\left|\int_0^1 E(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |E(x)|\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^3}{6}\,dx = \frac{1}{24},$$

så måste det gälla att

$$1 - \frac{1}{24} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1 + \frac{1}{24}.$$

□

Svar:

9. Visa att $|y(h) - y_1| \leq h^2$ för alla $h > 0$, där y löser begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) = -y(t)^2, \quad y(0) = 1,$$

och y_1 är resultatet av ett Framåt Euler-steg med längd h från startpunkten $(t, y) = (0, 1)$. I lösningen av denna uppgift får man använda att $y(t) > 0$ för alla t.

Lösning. Taylorpolynomet av ordning ett (linjäriseringen) runt $(t, y) = (0, 1)$ ger

$$P(t) = y(0) + y'(0)t.$$

Eulerlösningen definieras av $y_1 = P(h)$. Skillnaden mellan Taylorpolynomet och funktionen y ger därför felet i Euler-steget:

$$y(h) - y_1 = y(h) - P(h) = \frac{y''(s)}{2}h^2,$$

för något $0 \leq s \leq h$. För att få tag i andraderivatan av y deriveras differentialekvationen:

$$y''(s) = -\frac{d}{ds}y(s)^2 = -2y(s)y'(s) = 2y(s)^3,$$

där vi i sista likheten använder $y'(s) = -y(s)^2$. Eftersom $y' \leq 0$ och $y(0) = 1$ följer det att $0 < y(s) \leq 1$. Alltså följer det att $|y(h) - y_1| \leq h^2$.

$\square$
