SF1664
Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Tentamen
Tisdagen den 7 april 2015

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Vid denna tentamen examineras momenten TENA/TEN1 och TEN2. Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Den som är godkänd på denna tentamen (se betygsgränser nedan) blir godkänd på både moment TENA/TEN1 och moment TEN2. Den som inte uppnår godkänt på denna tentamen kan ändå bli godkänd på momentet TENA/TEN1 genom att få minst 6 poäng totalt på tentamens del A.

Betygsgränser:

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Låt $f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$.
   A. Bestäm definitionsmängden till funktionen f.
   B. Bestäm funktionens största och minsta värde.

   (Om du har glömt bort derivatan av arcsin x så kan du härleda den genom implicit derivering av sambandet $\sin(\arcsin x) = x$*. Om du minns den behöver du inte härleda den.)*

2. Avgör om det är sant att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < 2$.

3. Odämpad svängning beskrivs av differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

   där $y(t)$ är avvikelsen från jämviktsläget vid tidpunkten t och ω är en konstant.
   A. Lös differentialekvationen om $\omega = 4$.
   B. Finn den lösning till differentialekvationen (fortfarande med $\omega = 4$) som också uppfyller att $y(0) = -6$ och $y'(0) = 32$.
   C. Bestäm perioden och amplituden hos din lösning.

Del B

4. A. Använd trapetsmetoden med två delintervall, dvs. med steglängd $h = 1$, för att approximera arean av det område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$ för x i intervallet $0 \leq x \leq 2$.

   B. Skriv ett Matlab-program som beräknar en approximation av arean med trapetsmetoden och steglängden $h = 0.01$.

5. Låt $f(x) = 1 - (x - 1)^2, \ 0 \leq x \leq 2$. Gör en enkel skiss av funktionsgrafen $y = f(x)$ och finn den punkt (x_0, y_0) på funktionsgrafen som gör arean av triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(x_0, 0)$ och (x_0, y_0) maximal.

6. Beräkna, t ex med hjälp av variabelsubstitution eller partiell integration, integralen

$$\int_0^1 x\sqrt{1 - x}\, dx$$

Var god vänd!

DEL C

7. A. Formulera differentialkalkylens medelvärdessats.
   B. Använd den för att visa att en funktion vars derivata är noll i ett öppet intervall måste vara konstant i intervallet.

8. Låt f vara en tre gånger deriverbar funktion på intervallet $-1 < x < 2$, sådan att $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 6$ och $|f'''(x)| \leq 1$ för alla x i intervallet. Visa att
$$1 - \frac{1}{24} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1 + \frac{1}{24}.$$

9. Visa att $|y(h) - y_1| \leq h^2$ för alla $h > 0$, där y löser begynnelsevärdesproblemet
$$y'(t) = -y(t)^2, \quad y(0) = 1,$$
och y_1 är resultatet av ett Framåt Euler-steg med längd h från startpunkten $(t, y) = (0, 1)$. I lösningen av denna uppgift får man använda att $y(t) > 0$ för alla t.