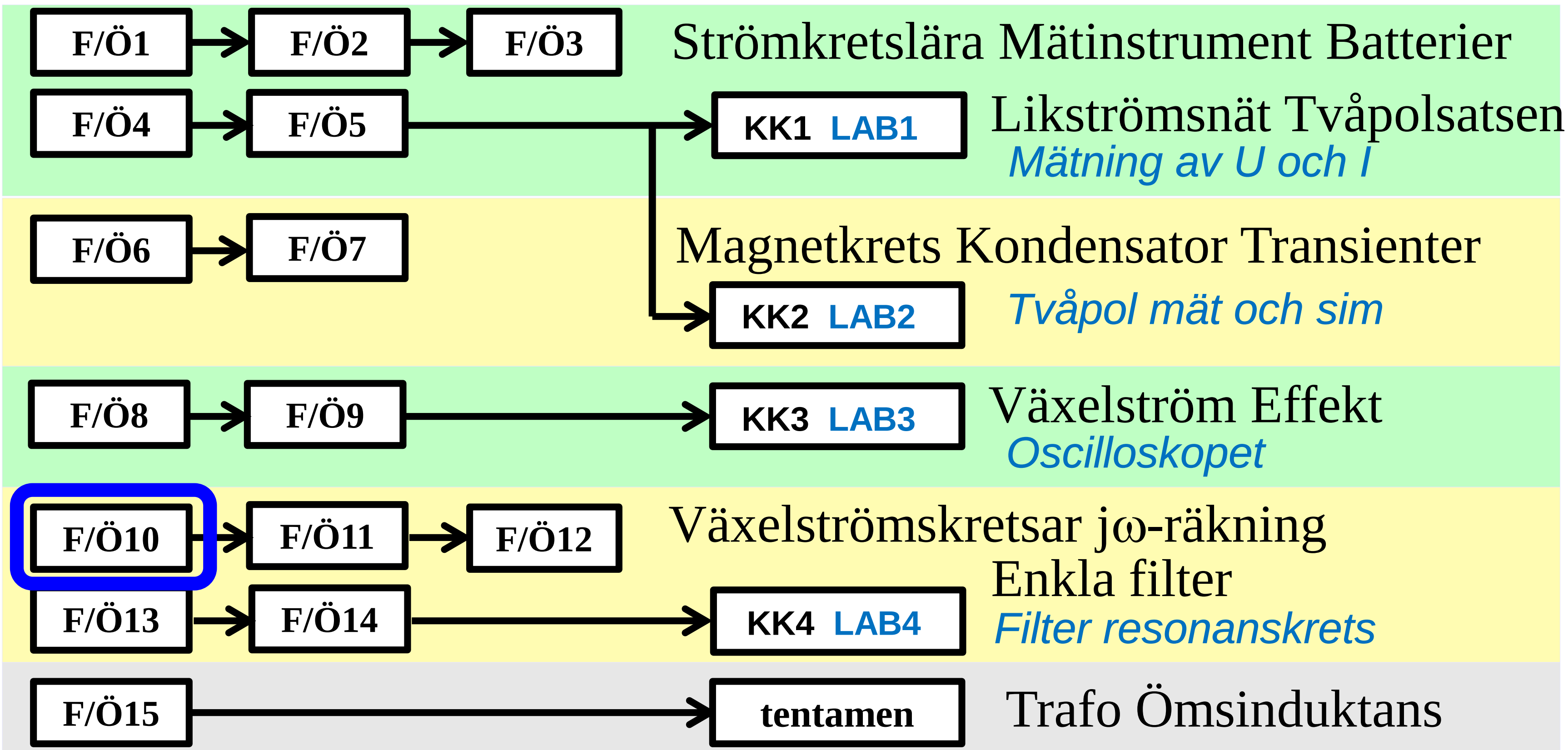
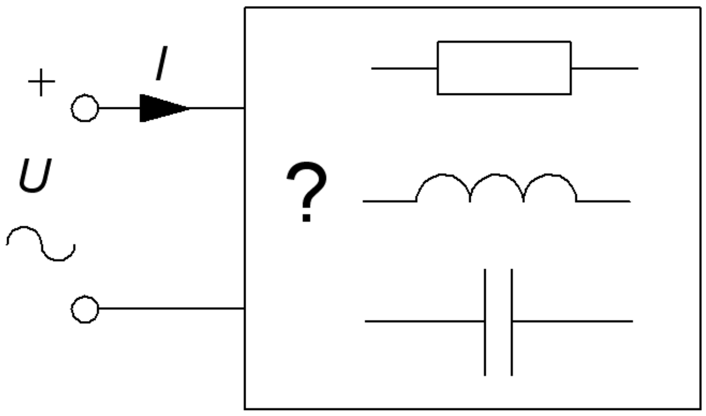
IF1330 Ellära

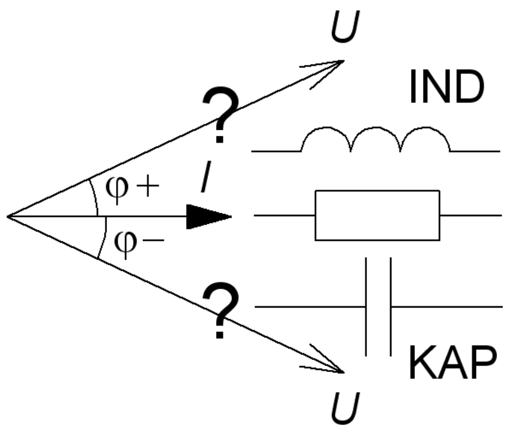


Föreläsningar och övningar bygger på varandra! Ta alltid igen det Du missat!
Läs på i förväg – delta i undervisningen – arbeta igenom materialet efteråt!

William Sandqvist william@kth.se

R L C





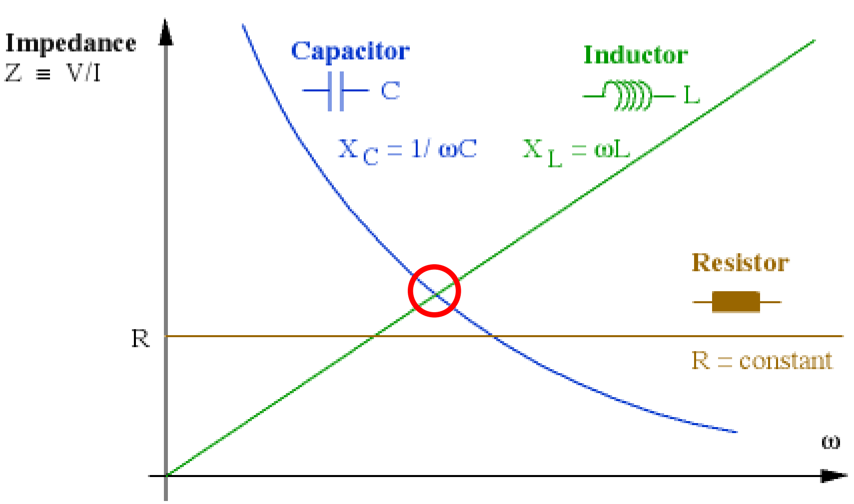
En impedans som innehåller spolar och kondensatorer har, beroende på frekvensen, antingen induktiv karaktär **IND**, eller kapacitiv karaktär **KAP**.

Ett viktigt *specialfall* uppstår vid den frekvens då kapacitanserna och induktanserna är jämstarka, och deras effekter tar ut varandra. Impedansen blir då rent resisistiv. Fenomenet kallas för **resonans** och den frekvens då detta uppträder är **resonansfrekvensen**.

Resonansfrekvens kalkylator

William Sandqvist william@kth.se

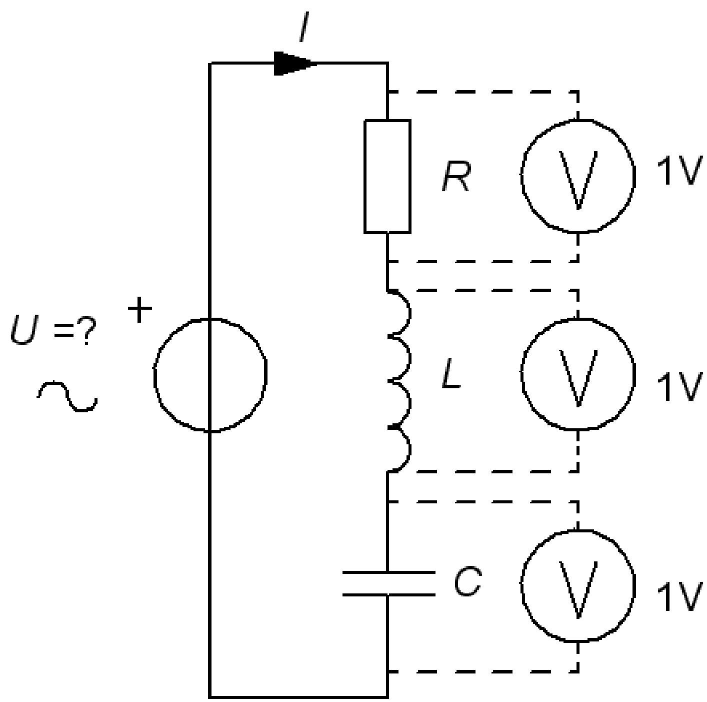
R L C impedanser



Vid en viss vinkelfrekvens har X_L och X_C samma belopp.

15.1 Hur stor är *U* ?

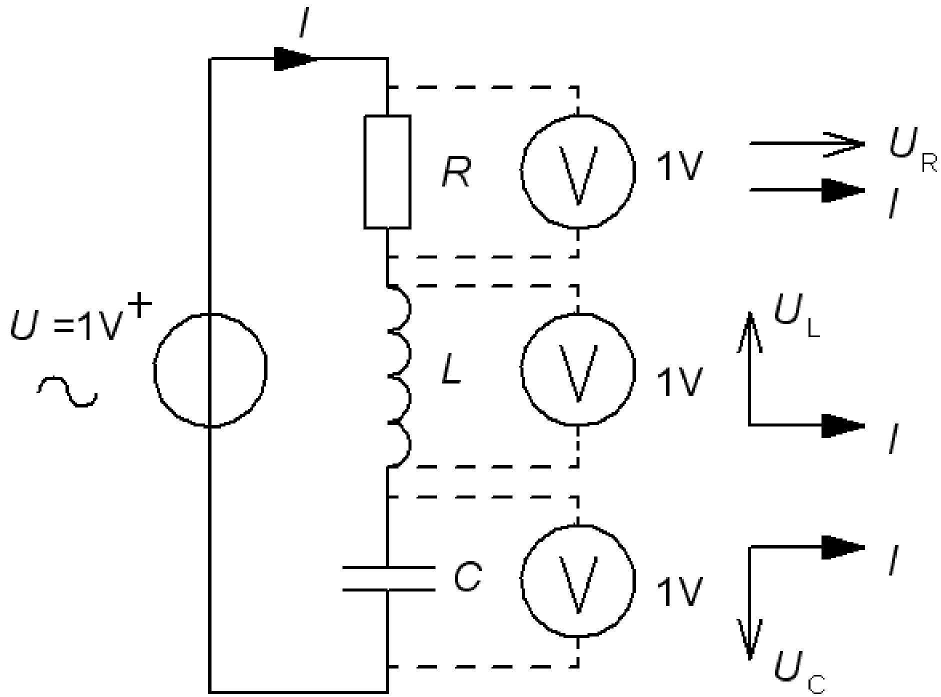
De tre voltmetrarna visar samma, 1V, hur stor är då den matande växel-spänningen *U* ?   (*Varning, kuggfråga*)



William Sandqvist william@kth.se

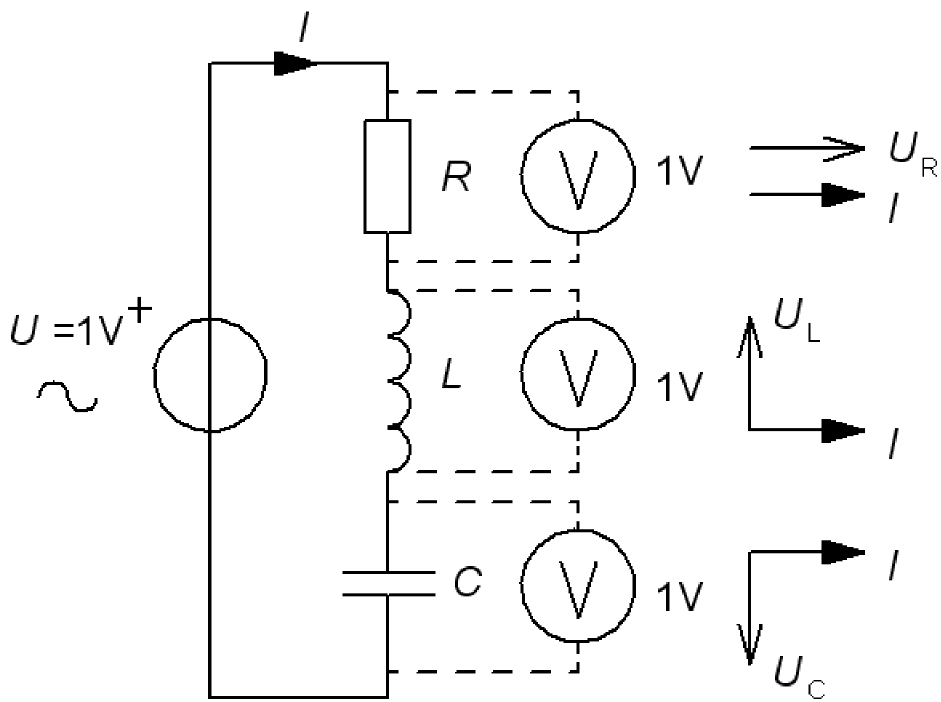
15.1 Hur stor är *U* ?

De tre voltmetrarna visar samma, 1V, hur stor är då den matande växel-spänningen *U* ? (*Varning, kuggfråga*)



15.1 Hur stor är *U* ?

De tre voltmetrarna visar samma, 1V, hur stor är då den matande växel-spänningen *U* ? (*Varning, kuggfråga*)



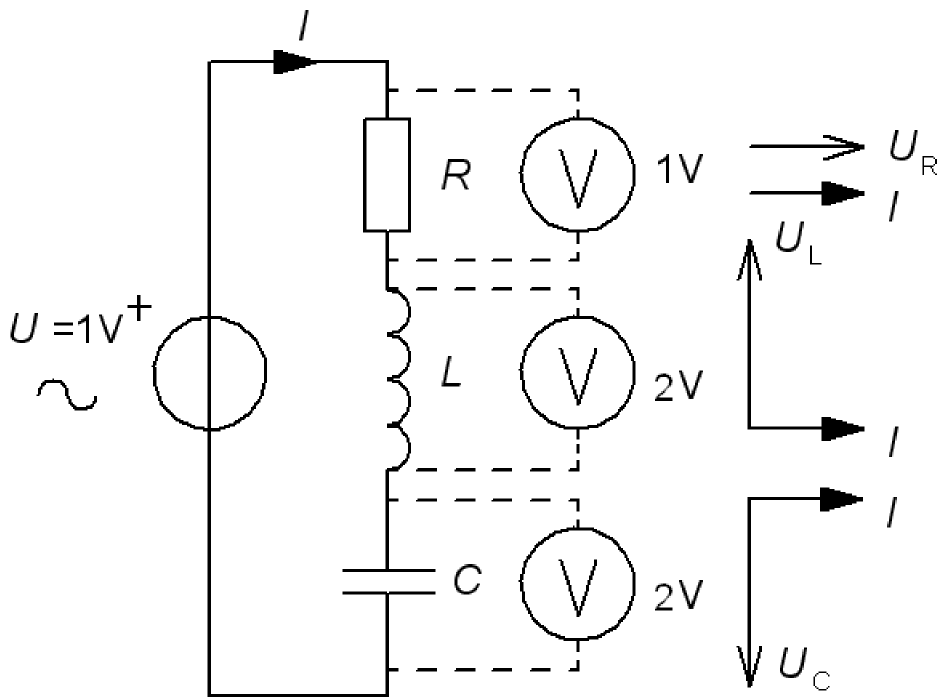
Eftersom voltmetrarna visar "*samma*" och strömmen *I* är *gemensam* så gäller:

$$R = |X_L| = |X_C| \qquad R = \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Om X_L=X_C=2R ?

Antag att växelspänningen *U* fortfarande är 1 V, men att reaktanserna är *dubbelt* så stora. Vad visar voltmetrarna?

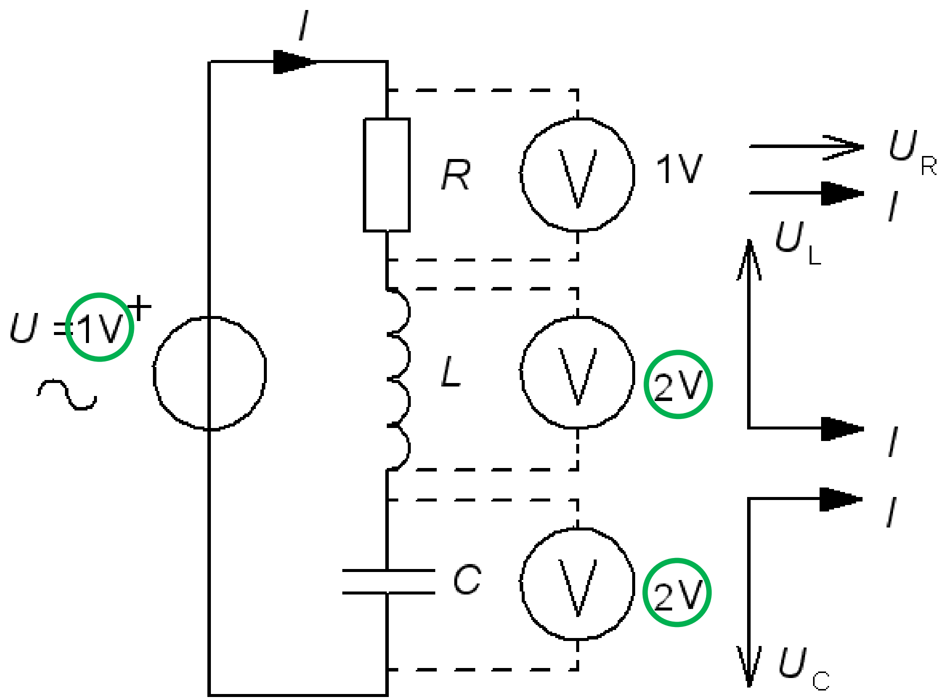
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \cdot R$$



Om $X_L = X_C = 2R$?

Antag att växelspänningen *U* fortfarande är 1 V, men att reaktanserna är *dubbelt* så stora. Vad visar voltmetrarna?

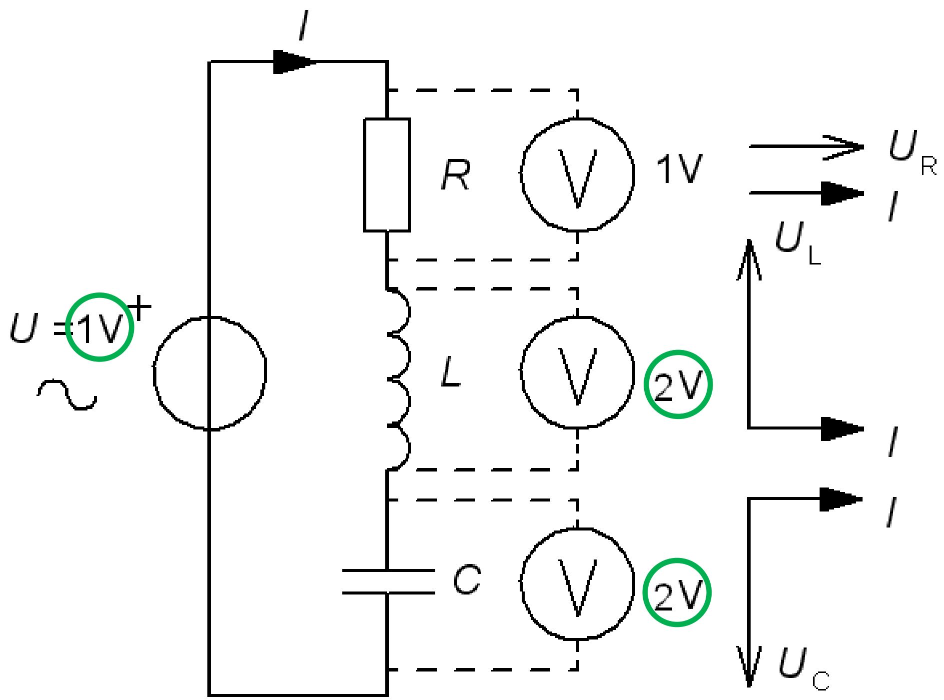
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \cdot R$$



Om $X_L = X_C = 2R$?

Antag att växelspänningen *U* fortfarande är 1 V, men att reaktanserna är *dubbelt* så stora. Vad visar voltmetrarna?

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \cdot R$$

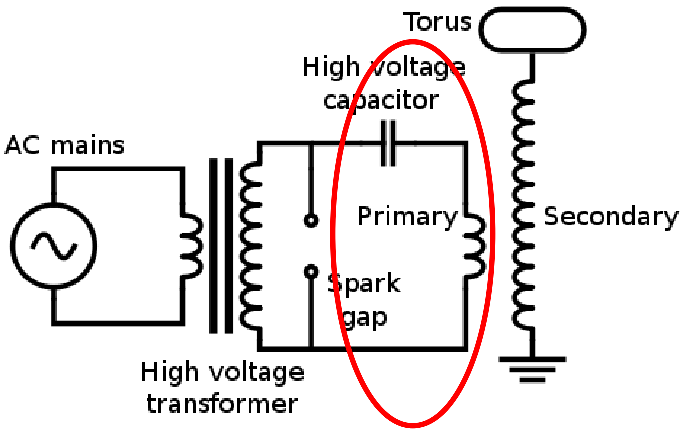


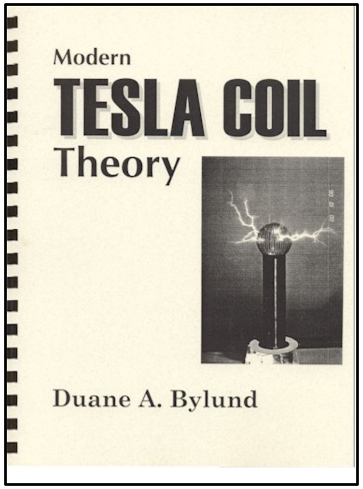
Vid resonans kan spänningarna över reaktanserna vara många gånger högre än den matande växelspänningen.

William Sandqvist william@kth.se

Tesla coil

Många bygger ”Tesla”-spolar för att skaffa sig lite spänning i livet …



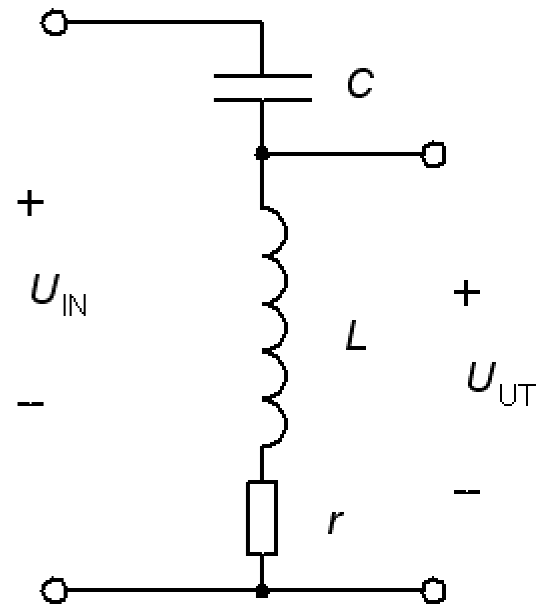


Spolens godhetstal *Q*

Oftast är det den inre resistansen i spolen som är resistorn i RLC-kretsen. Ju högre spolens växelströmsmotstånd ωL är i förhållande till likströmsmotståndet *r*, desto större blir spänningen över spolen vid en resonans.

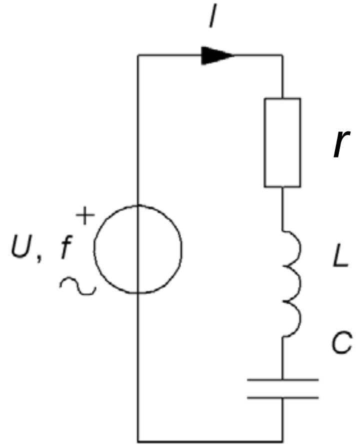
Detta förhållande kallas för spolens **godhetstal** *Q*. (eller Q-faktor).

$$Q = \frac{X_{\mathrm{L}}}{r} = \frac{\omega L}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\mathrm{UT}} \approx Q \cdot U_{\mathrm{IN}}}$$



Serieresonansen

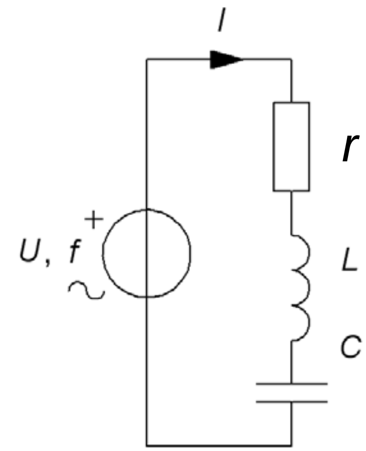
$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left(r + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \right) = \underline{I} \cdot \left(r + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right)$$



Serieresonansen

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left(r + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \right) = \underline{I} \cdot \left(r + \mathrm{j}\underbrace{\boxed{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}}_{} \right)$$

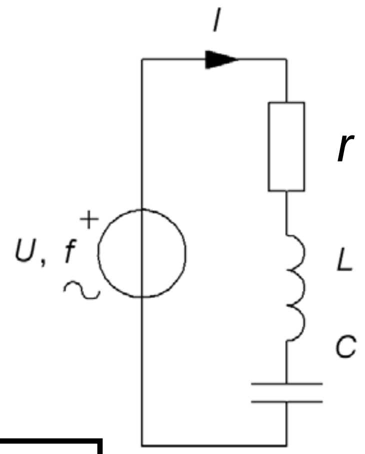
=0



Impedansen är reell när imaginärdelen är ”0”. Detta inträffar vid vinkelfrekvensen ω_0 (frekvensen f_0).

Serieresonansen

$$\underline{U} = \underline{I}\cdot\left(r + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right) = \underline{I}\cdot\left(r + \mathrm{j}\overbrace{\boxed{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}}^{=0}\right)$$

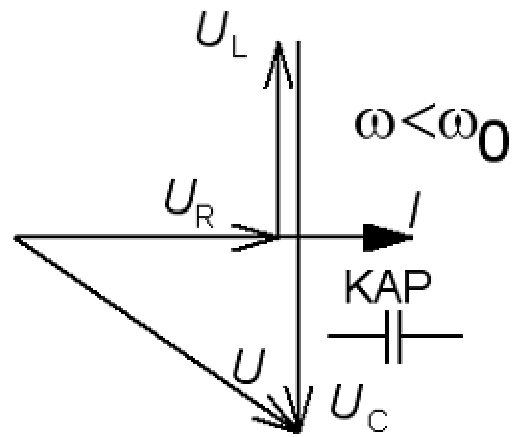


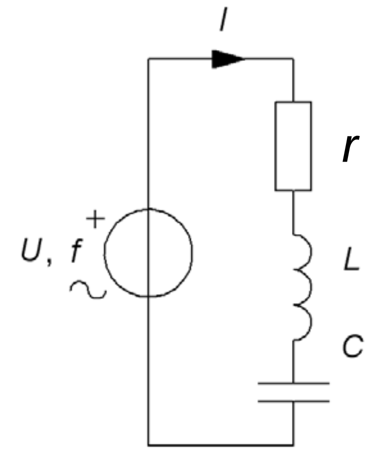
Impedansen är reell när imaginärdelen är ”0”. Detta inträffar vid vinkelfrekvensen ω_0 (frekvensen f_0).

$$\mathrm{Im}[\underline{Z}] = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

Serieresonansens visardiagram

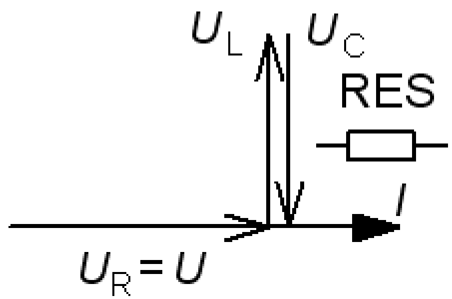
$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left(r + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right)$$



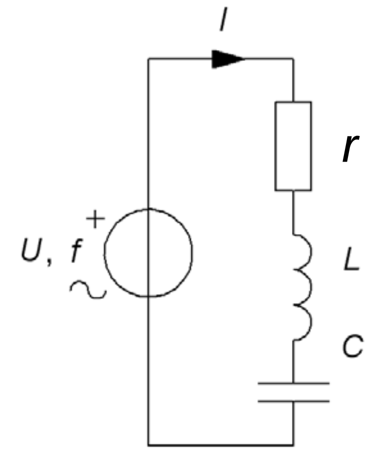


Serieresonansens visardiagram

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left(r + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right)$$

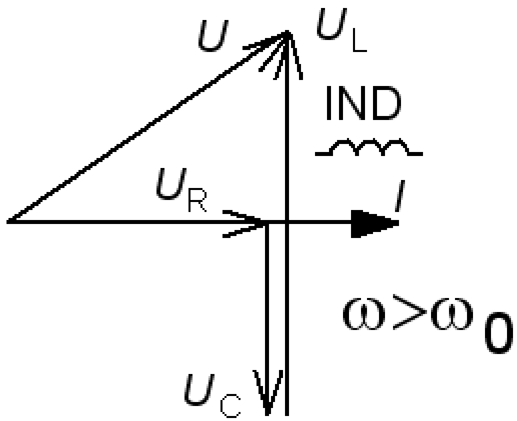


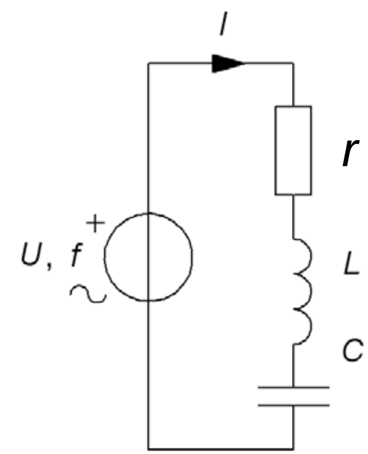
$\omega = \omega_0$



Serieresonansens visardiagram

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left(r + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right)$$

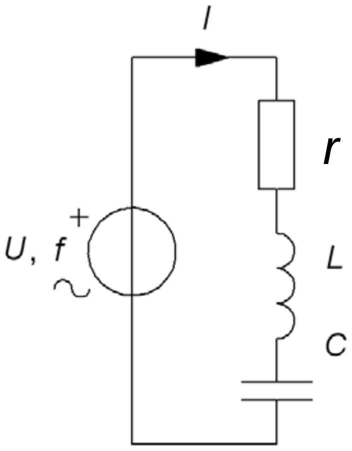




Serieresonanskretsens *Q*

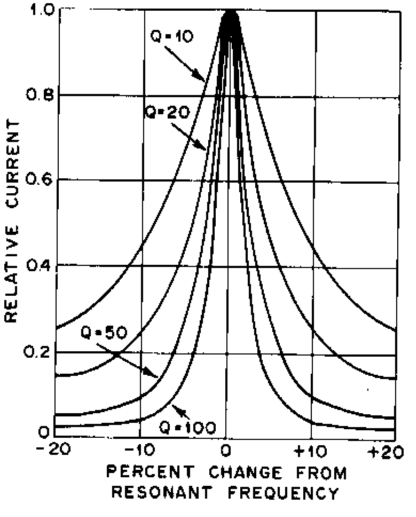
Det är *resistansen* i resonanskretsen, oftast spolens inre resistans, som avgör hur uttalat resonansfenomenet blir.

Man brukar ”*normera*” sambandet mellan de olika variablerna genom att *införa* resonansvinkelfrekvensen $\boldsymbol{\omega_0}$ tillsammans med $\boldsymbol{Q}$ och maxströmmen $\boldsymbol{I_{max}}$ i funktionen $I(\omega)$:



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{r}$$

$$\underline{I} = \frac{I_{max}}{\left(1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$



Normerat diagram för serieresonans-kretsen.

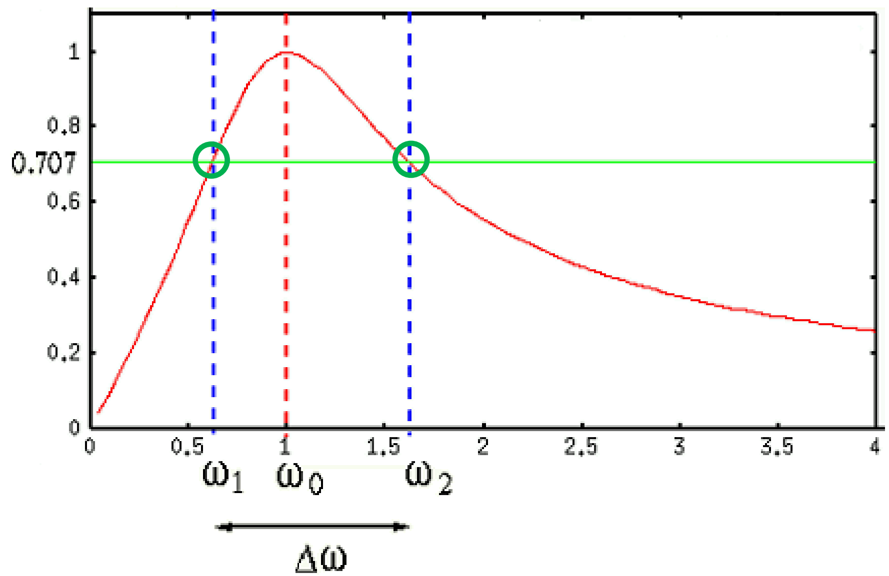
Ett högt Q mot-svarar en smal resonanstopp.

Bandbredden *BW*

Vid *två* olika vinkelfrekvenser blir imaginärdel **Im** och realdel **Re** i nämnaren *lika* stora.
I är då $I_{max}/\sqrt{2}$ (≈71%).
Bandbredden *BW*=Δω är avståndet mellan dessa vinkel-frekvenser.

$$\underline{I} = \frac{I_{max}}{\left(\boxed{1} + j\boxed{Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right)}$$

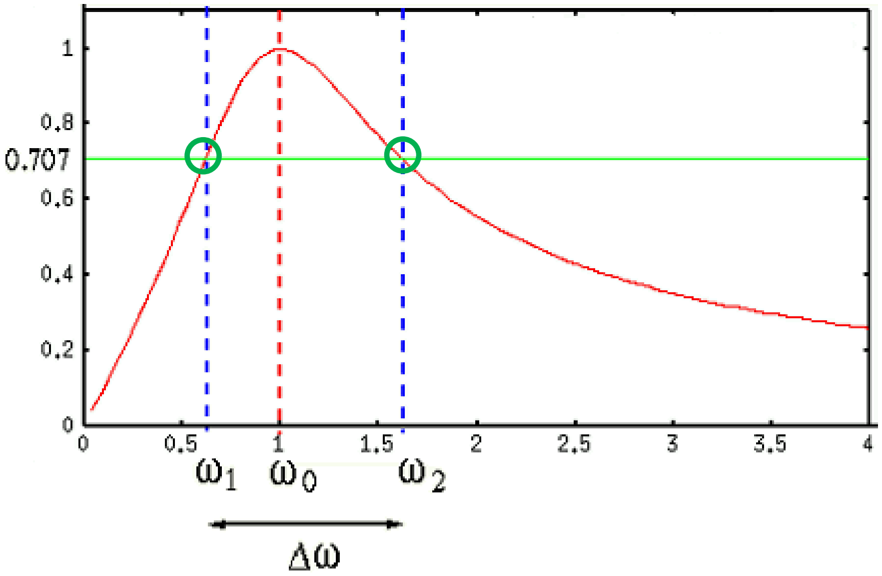
Re = Im



andragradsekvationer ger :

$$BW[\mathrm{rad/s}] = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \qquad \omega_0^2 = \omega_2 \cdot \omega_1 \qquad \omega_2, \omega_1 = \omega_0\left(\pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1}\right)$$

Bekvämare formler



$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \qquad \boxed{Q = \frac{2\pi f_0 L}{r}} \qquad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}}$$

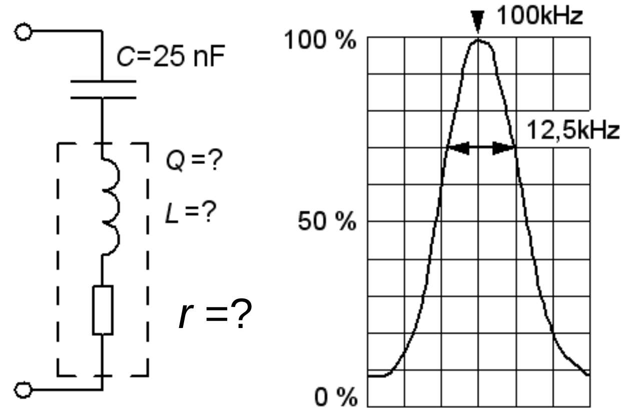
Om Q är *högt* gör man *inget större fel* om man fördelar bandbredden *lika* på båda sidor om f_0.

$$f_2, f_1 \approx f_0 \pm \frac{\Delta f}{2}$$

Exempel, serieresonanskrets

C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
BW = Δf = 12,5 kHz

Q = ? *L* = ? *r* = ?

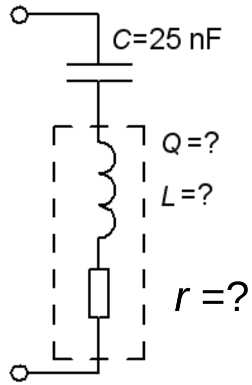


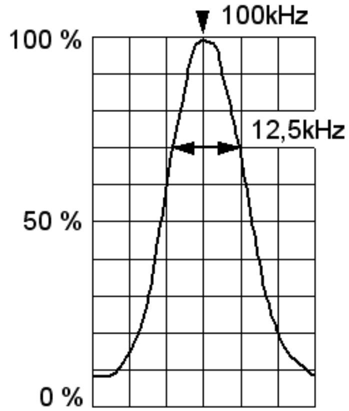
Exempel, serieresonanskrets

C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
$BW = \Delta f$ = 12,5 kHz

Q = ? L = ? r = ?

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100}{12{,}5} = 8$$

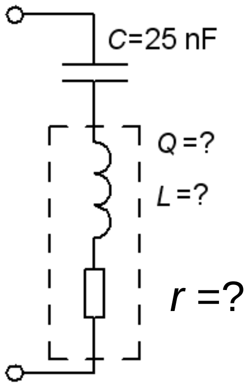


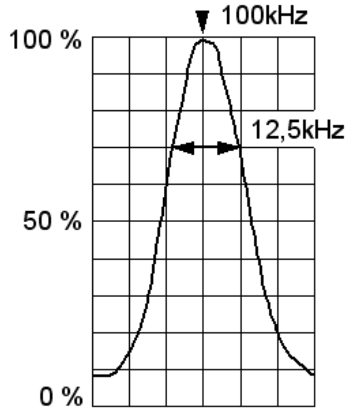


Exempel, serieresonanskrets

C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
$BW = \Delta f$ = 12,5 kHz

Q = ? L = ? r = ?





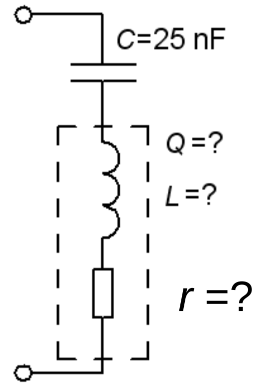
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100}{12{,}5} = 8$$

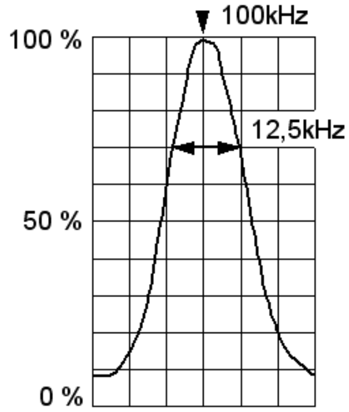
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0{,}1\,\mathrm{mH}$$

Exempel, serieresonanskrets

C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
$BW = \Delta f$ = 12,5 kHz

Q = ? L = ? r = ?





$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100}{12{,}5} = 8$$

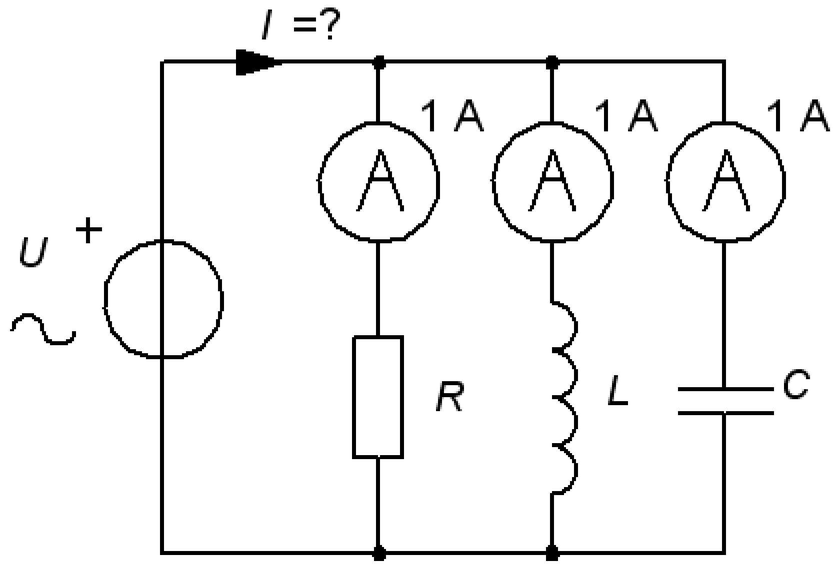
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0{,}1\,\mathrm{mH}$$

$$Q = \frac{X_L}{r} = \frac{2\pi f_0 \cdot L}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2\pi f_0 \cdot L}{Q} = \frac{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}}{8} \approx 8\,\Omega$$

William Sandqvist william@kth.se

15.2 Hur stor är *I* ?

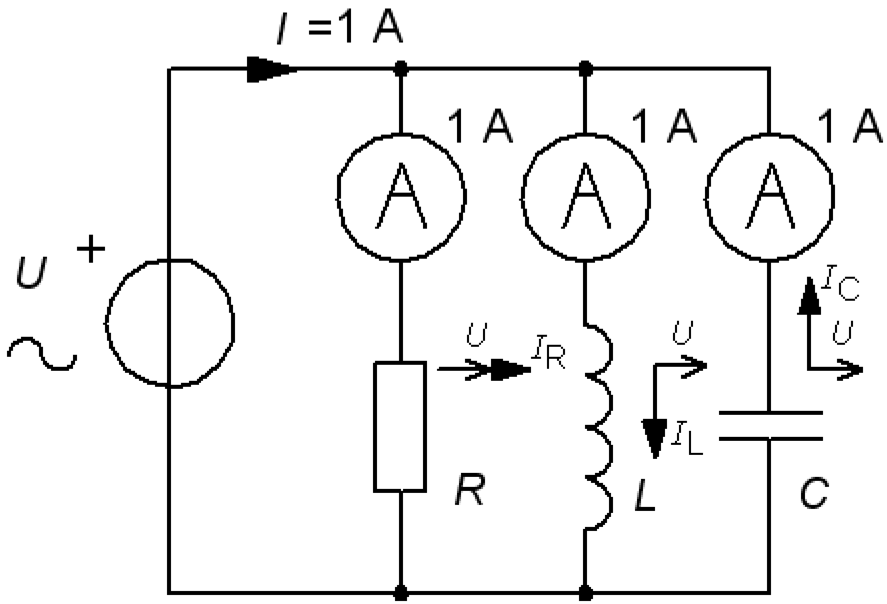
De tre amperemetrarna visar samma, 1A, hur stor är då den matande växelströmmen *I* ? (*Varning, kuggfråga*)



William Sandqvist william@kth.se

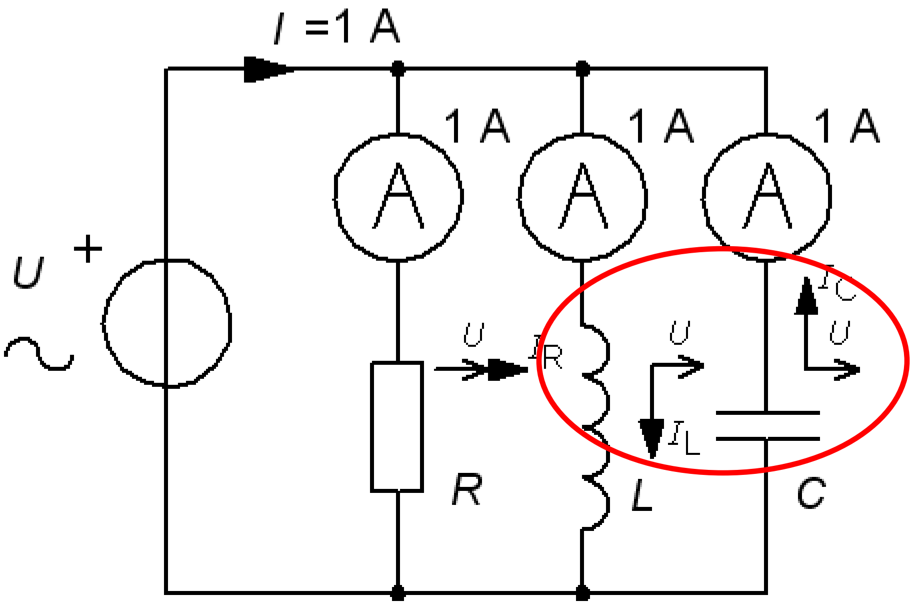
15.2 Hur stor är ***I*** ?

De tre amperemetrarna visar samma, 1A, hur stor är då den matande växelströmmen *I* ? (*Varning, kuggfråga*)



15.2 Hur stor är *I* ?

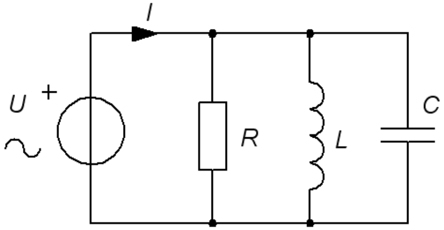
De tre amperemetrarna visar samma, 1A, hur stor är då den matande växelströmmen *I* ?   (*Varning, kuggfråga*)



I_L och I_C blir en cirkulerande ström frikopplad från I_R. I_L, I_C kan vara *många gånger större* än det matande nätets ström I = I_R.   Detta är parallellresonans.

Ideal parallellresonanskrets

$$\underline{Z} = R \parallel L \parallel C = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}\,(\underset{=0}{\boxed{\omega C - \frac{1}{\omega L}}})}$$



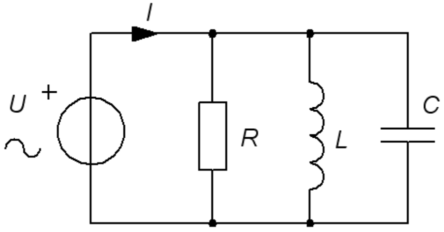
Resonansfrekvensen får precis *samma* uttryck som för serieresonans-kretsen, men för övrigt har kretsen **omvänd karaktär**, IND vid låga frekvenser och KAP vid höga. Vid resonans är impedansen reell = *R*.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

William Sandqvist william@kth.se

Ideal parallellresonanskrets

$$\underline{Z} = R \,||\, L \,||\, C = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}\,(\underbrace{\boxed{\omega C - \frac{1}{\omega L}}}_{=0})}$$

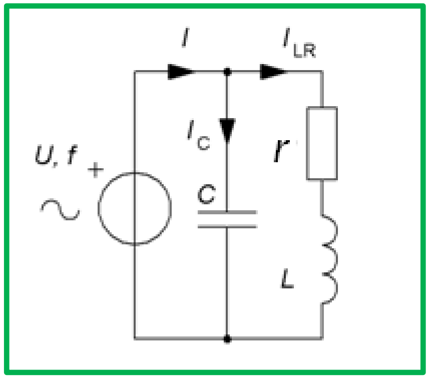


Resonansfrekvensen får precis *samma* uttryck som för serieresonans-kretsen, men för övrigt har kretsen **omvänd karaktär**, IND vid låga frekvenser och KAP vid höga. Vid resonans är impedansen reell = *R*.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Verklig parallellresonanskrets

Verkliga parallellresonanskretsar har en serieresistans inuti spolen. Beräkningarna blir betydligt mer kompli-cerade och resonansfrekvensen kommer också att avvika något från vår formel.

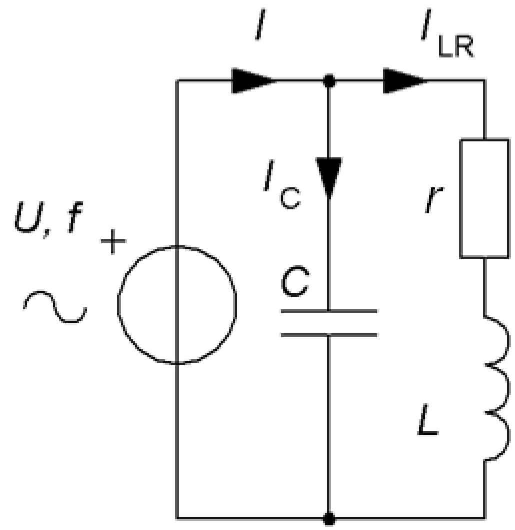


William Sandqvist william@kth.se

Exempel, verklig krets (15.3)

$$\underline{I} = \underline{I}_{\mathrm{C}} + \underline{I}_{\mathrm{LR}} = \frac{U}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + \frac{U}{r + \mathrm{j}\omega L} \cdot \frac{(r - \mathrm{j}\omega L)}{(r - \mathrm{j}\omega L)} = U \cdot \left(\mathrm{j}\omega C + \frac{r - \mathrm{j}\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} \right) =$$

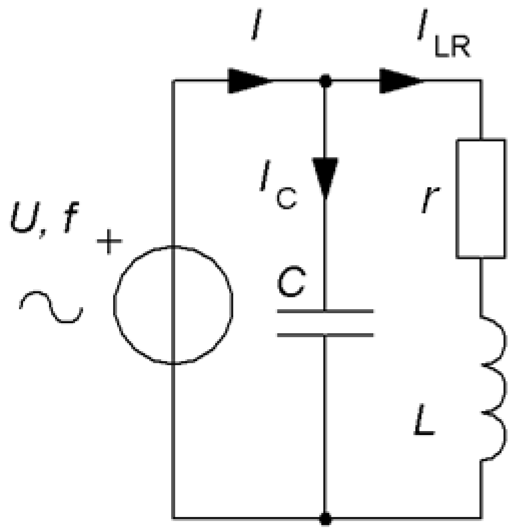
$$= U \cdot \left(\frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j} \underbrace{\boxed{\left(\omega C - \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} \right)}}_{=0} \right)$$



Exempel, verklig krets (15.3)

$$\underline{I} = \underline{I}_{\mathrm{C}} + \underline{I}_{\mathrm{LR}} = \frac{U}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + \frac{U}{r + \mathrm{j}\omega L}\cdot\frac{(r - \mathrm{j}\omega L)}{(r - \mathrm{j}\omega L)} = U\cdot\left(\mathrm{j}\omega C + \frac{r - \mathrm{j}\omega L}{r^2 + (\omega L)^2}\right) =$$

$$= U\cdot\left(\frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j}\underbrace{\boxed{\left(\omega C - \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2}\right)}}_{=0}\right)$$



$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{r^2 + (\omega_0 L)^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2} \quad \omega_0 = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2}\right)}}$$

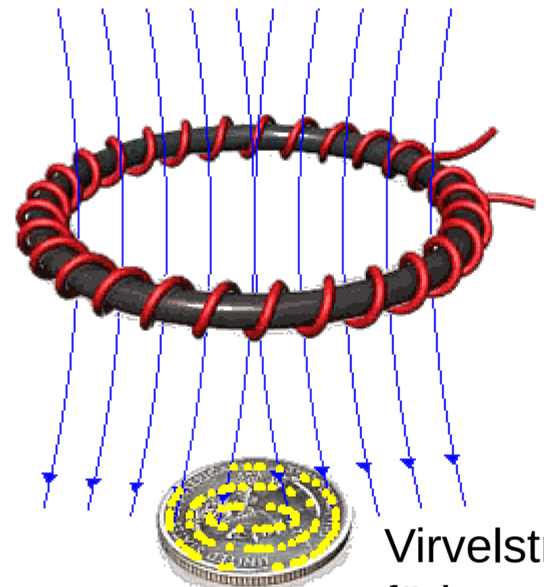
Metalldetektorn

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2}\right)}$$

Alla ”förluster” (även virvel-strömsförluster i metaller) sammanfattas av symbolen r !

Järnföremål påverkar magnet-fältet och därmed även L !

Parallellresonans-frekvensen påverkas av spolens förluster. Så kan gömda skatter hittas!



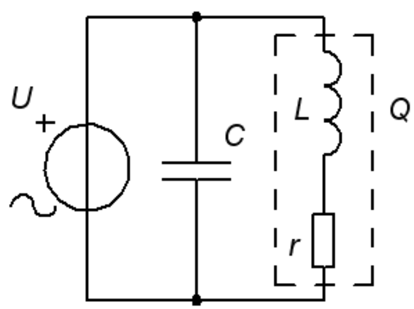
Virvelströms-förluster

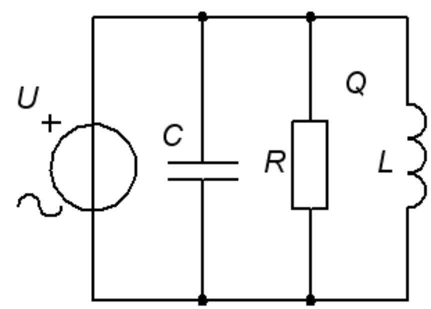
Serie- *eller* Parallellresistor

Vid handräkning brukar man för enkelhets skull använda formlerna för den ideala resonanskretsen. Vid högt Q och nära resonansfrekvensen f_0 blir avvikelserna obetydliga.

Överslagsmässigt (vid **Q >10**) är de två kretsarna ”utbytbara”.

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$





Alternativ definition av Q med R_P

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0 L}{r_S} = \frac{R_P}{\omega_0 L}} \Rightarrow \boxed{R_P = Q^2 \cdot r_S}$$

*(Gäller approximativt för **Q >10**)*

William Sandqvist william@kth.se

Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.
C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
BW = 1250 Hz

L = ? r = ?

Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.

C = 25 nF

f_0 = 100 kHz

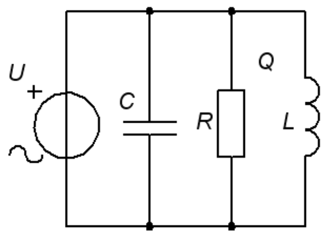
BW = 1250 Hz

L = ? r = ?

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.
C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
BW = 1250 Hz



L = ? *r* = ?

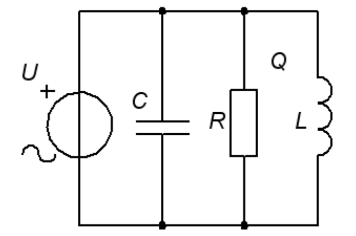
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

80 > 10 vilket motiverar räkning med den ideala modellen.

Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.
C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
BW = 1250 Hz

L = ? *r* = ?



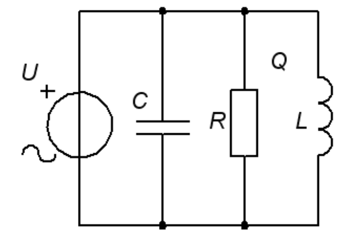
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

80 > 10 vilket motiverar räkning med den ideala modellen.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0{,}1\,\mathrm{mH}$$

Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.
C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
BW = 1250 Hz



L = ? r = ?

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

80 > 10 vilket motiverar räkning med den ideala modellen.

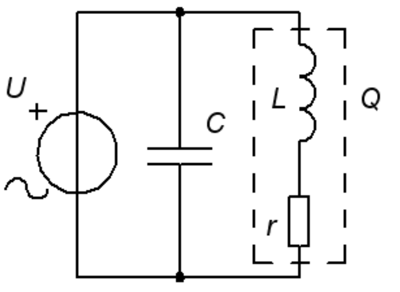
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0{,}1\,\mathrm{mH}$$

$$Q = \frac{R_\mathrm{P}}{X_\mathrm{L}} = \frac{R_\mathrm{P}}{2\pi f_0 \cdot L} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{P} = 2\pi f_0 \cdot L \cdot Q = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \approx 5027\ \Omega$$

Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.
C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
BW = 1250 Hz

Svara med serieresistor!



L = ? *r* = ?

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

80 > 10 vilket motiverar räkning med den ideala modellen.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0{,}1\,\mathrm{mH}$$

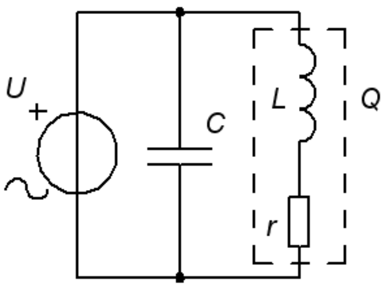
$$Q = \frac{R_\mathrm{P}}{X_\mathrm{L}} = \frac{R_\mathrm{P}}{2\pi f_0 \cdot L} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{P} = 2\pi f_0 \cdot L \cdot Q = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \approx 5027\,\Omega$$

$$r_\mathrm{S} = \frac{1}{Q^2} R_\mathrm{P} = \frac{1}{80^2} 5027 \approx 0{,}8\,\Omega$$

Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.
C = 25 nF
f_0 = 100 kHz
BW = 1250 Hz

Svara med serieresistor!



L = ? *r* = ?

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

80 > 10 vilket motiverar räkning med den ideala modellen.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0{,}1\,\mathrm{mH}$$

$$Q = \frac{R_\mathrm{P}}{X_\mathrm{L}} = \frac{R_\mathrm{P}}{2\pi f_0 \cdot L} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{P} = 2\pi f_0 \cdot L \cdot Q = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \approx 5027\,\Omega$$

$$r_\mathrm{S} = \frac{1}{Q^2} R_\mathrm{P} = \frac{1}{80^2} 5027 \approx 0{,}8\,\Omega$$

Tur att vi *inte* behövde använda denna formel för att beräkna L

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2}\right)}$$

Kondensatorer, förlustfaktorn *D*

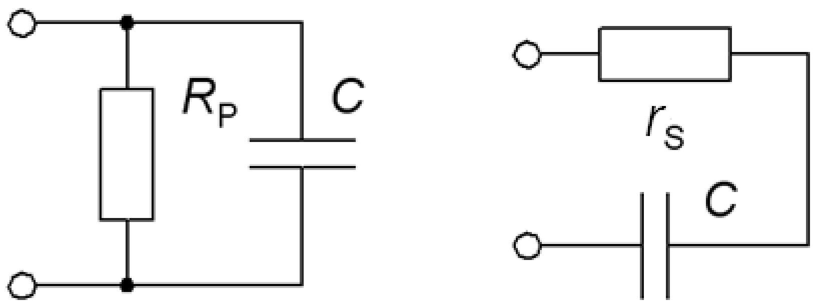
Alla växelspänningsförluster i resonanskretsarna sker i resistanser, oavsett om det är en serieresistans eller en parallellresistans. De största förlusterna svarar oftast spolar för, men även kondensatorer kan bidraga till förlusterna.

Kondensatorer har i allmänhet en parallellresistans, men på samma sätt som med spolar kan denna *räknas om* till en ”tänkt” serie-resistans.

För kondensatorer är det vanligare att man anger förlustfaktorn *D* än att man anger godhetstalet *Q*. Båda begreppen är dock likvärdiga.

$$D = \frac{1}{Q}$$

Kondensatorer, förlustfaktorn *D*

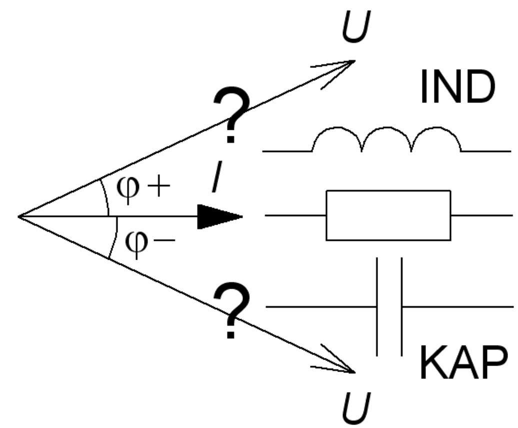


$$D = \frac{1}{Q} \qquad Q = \frac{R_P}{\frac{1}{\omega C}} = \omega R_P C \qquad Q = \frac{\frac{1}{\omega C}}{r_S} = \frac{1}{\omega r_S C}$$

$$R_P = Q^2 \cdot r_S \quad \Leftrightarrow \quad r_S = D^2 \cdot R_P$$

William Sandqvist william@kth.se

RCL-mätaren



PM6303 RCL-meter

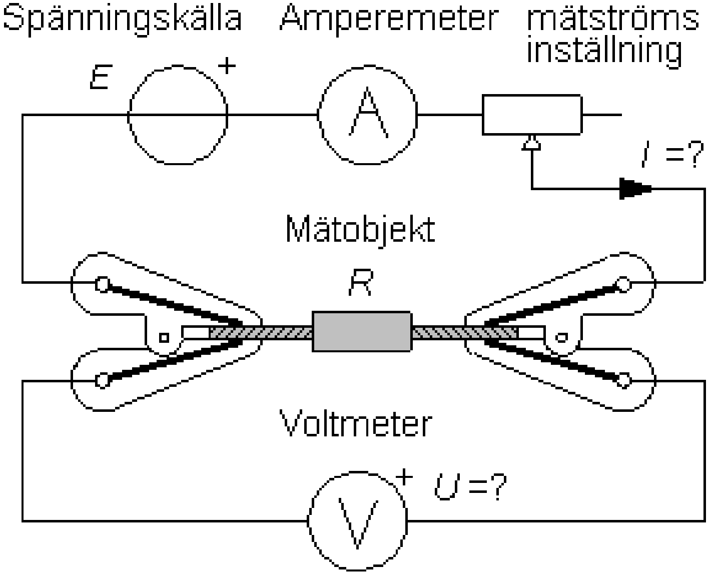
Denna RCL-meter möter Du vid skolans laborationer.

William Sandqvist william@kth.se

4-trådsmätning

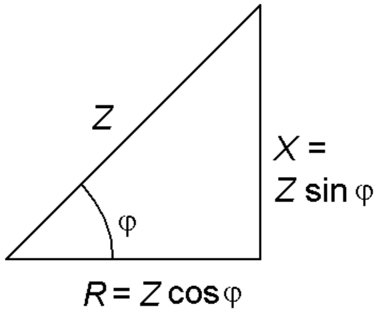
Fyrtrådsanslutning med Kelvinklämma

$$R = \frac{U}{I}$$



RCL-mätaren är förberedd för fyrtrådsmätning.

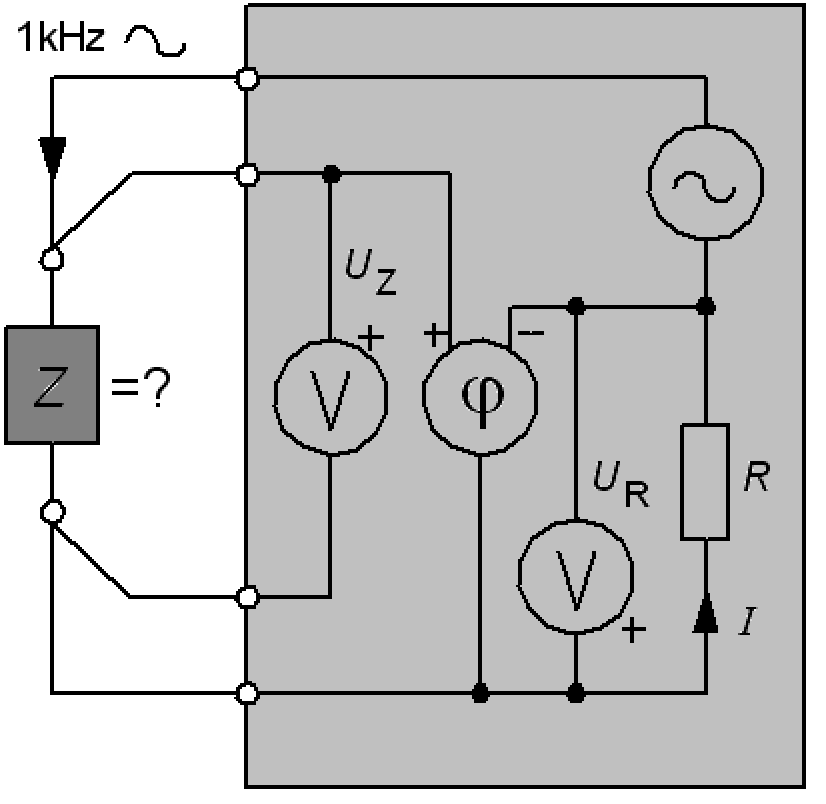
RCL, spänning/ström metoden



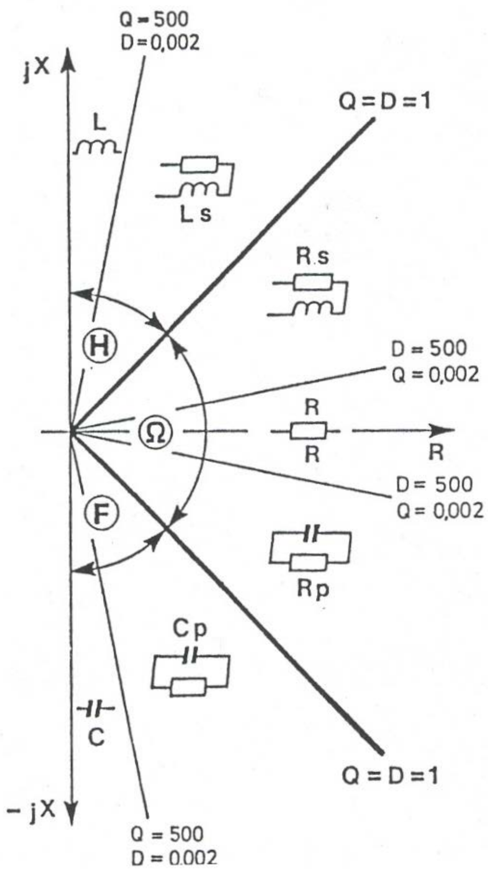
$$\underline{Z} = R_{\mathrm{SER}} + \mathrm{j}X$$

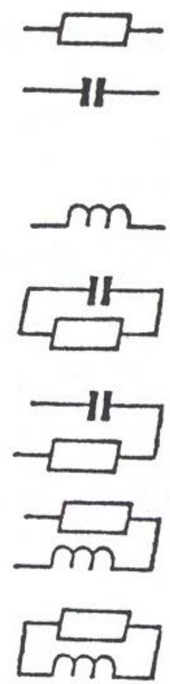
$$\left|\underline{Z}\right| = \frac{U_{\mathrm{Z}}}{I_{\mathrm{Z}}} = \frac{R \cdot U_{\mathrm{Z}}}{U_{\mathrm{R}}}$$

$$Q = \frac{\left|X\right|}{R_{\mathrm{SER}}} = \frac{Z \sin\varphi}{Z \cos\varphi} = \tan(\varphi)$$



PM6303 auto-ranges





parameter	condition
RCL AUTO, Rp, Rs, Z, Q	D > 500
RCL AUTO, Z, D, Cp, Cs, Cs (2 V BIAS)	Q > 500
RCL AUTO, Ls, Lp, Z, D	Q > 500
RCL AUTO, Cp, Rp, Q, D, Z Cs, Rs, Cs (2 V BIAS) RCL AUTO, Ls, Rs, Q, D, Z Lp, Rp	500>Q>0,002 0,002<D<500