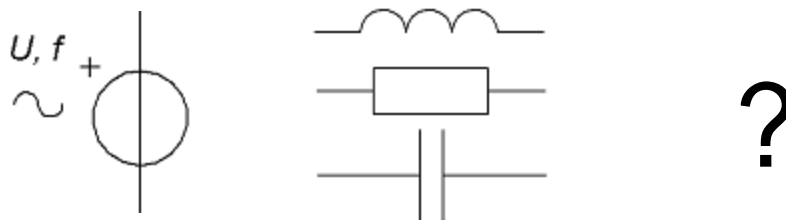


Spolen och Kondensatorn motverkar förändringar

Spolen och kondensatorn motverkar förändringar, tex vid **inkoppling** eller **urkoppling** av en källa till en krets.

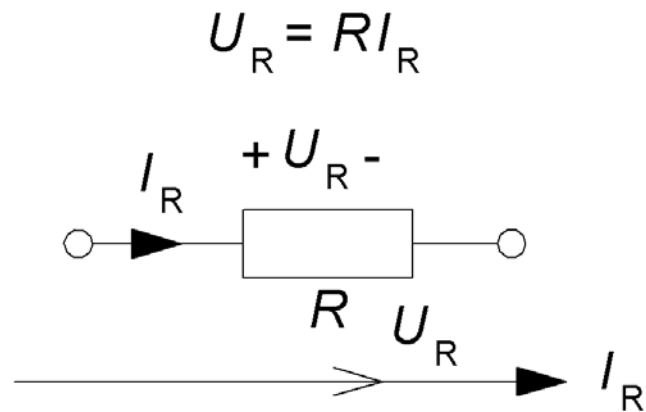
Hur går det då om källan avger en **sinusformad växelström**
– som ju ändrar sig kontinuerligt?



Växelström genom resistor

En sinusformad växelström $i_R(t)$ genom en resistor R ger ett proportionellt sinusformat spänningsfall $u_R(t)$ enligt OHM's lag. Strömmen och spänningen blir i fas. Ingen energi lagras i resistorn.

Visarna U_R och I_R blir parallella med varandra.



$$i_R(t) = \hat{I}_R \cdot \sin(\omega t) \quad u_R(t) = i_R(t) \cdot R \quad \Rightarrow \quad u_R(t) = R \cdot \hat{I}_R \cdot \sin(\omega t)$$

$$\boxed{U_R = R \cdot I_R} \quad \text{Vektor visare}$$

$$\boxed{\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R} \quad \text{Komplexa visare}$$

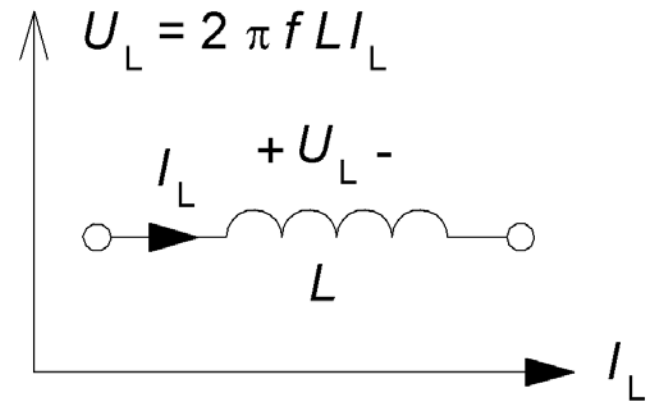
Visarna kan vara toppvärdesvisare **eller** effektivvärdesvisare så länge man inte blandar olika typer.

William Sandqvist william@kth.se

Växelström genom spole

En sinusformad växelström $i_L(t)$ genom en spole ger på grund av självinduktion ett spänningsfall $u_L(t)$ som ligger 90° före strömmen. Energi som lagras i magnetfältet används till denna spänning.

Visaren U_L fås som $\omega L \cdot I_L$ och den ligger 90° före I_L . Storheten ωL är "beloppet" av spolens växelspänningsmotstånd, **reaktansen** X_L [Ω].



$$i_L(t) = \hat{I}_L \cdot \sin(\omega t) \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow u_L(t) = \omega L \cdot \hat{I}_L \cdot \cos(\omega t) = \omega L \cdot \hat{I}_L \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{U_L = \omega L \cdot I_L} \quad \text{Vektor visare}$$

När man räknar med komplexa visare multiplicerar man ωL med talet "j", detta vrider spänningsvisaren $+90^\circ$. *Metoden håller automatiskt reda på fasvinklarna!*

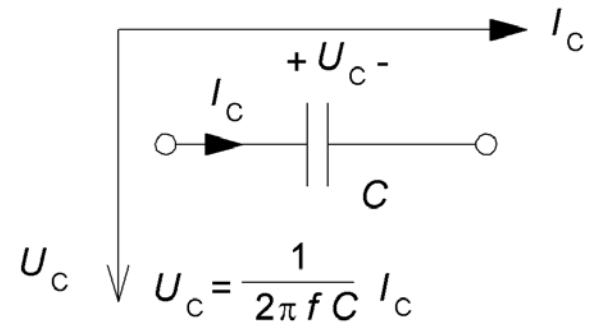
$$\boxed{\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L = jX_L \cdot \underline{I}_L} \quad \text{Komplexa visare}$$

William Sandqvist william@kth.se

Växelström genom kondensator

En sinusformad växelström $i_C(t)$ genom en kondensator laddar upp denna med "spänningsfallet" $u_C(t)$ som ligger 90° efter strömmen. Energi lagras i det elektriska fältet.

Visaren U_C fås som $I_C/(\omega C)$ och den ligger 90° efter I_C . Storheten $1/(\omega C)$ är "beloppet" av kondensatorns växelspänningsmotstånd, **reaktansen** X_C [Ω].



$$U = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C(t) \Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) dt$$

$$i_C(t) = \hat{I}_C \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow u_C(t) = -\frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I}_C \cdot \cos(\omega t) = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I}_C \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I_C$$

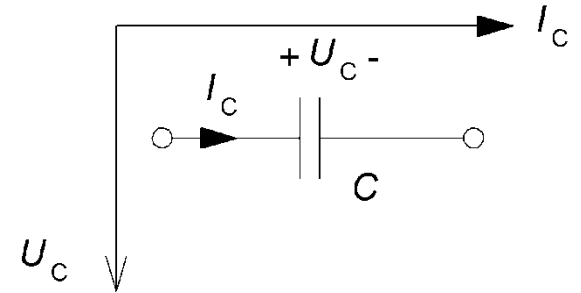
Vektor visare

William Sandqvist william@kth.se

Komplexa visare och reaktansens tecken

Om man använder komplexa visare får man med spänningsvisarens fasvridning -90° genom att dividera $1/(\omega C)$ med konstanten "j".

Metoden med komplexa visare håller automatiskt reda på fasvinklarna om vi betraktar kondensatorns reaktans X_C som **negativ**, och därmed spolens X_L som **positiv**.

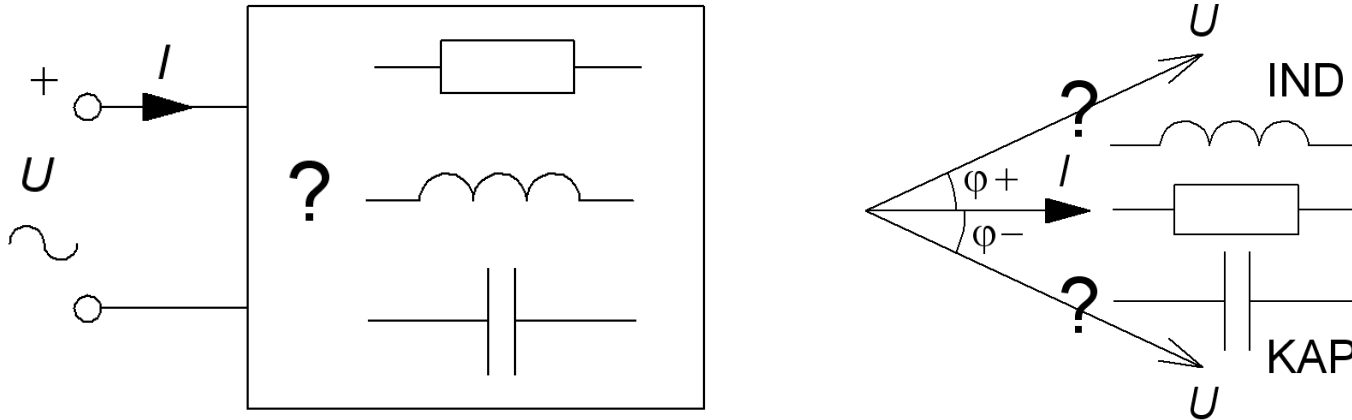


$$\underline{U}_c = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}_c = j \frac{-1}{\omega C} \cdot \underline{I}_c \Rightarrow X_c = -\frac{1}{\omega C}$$

Komplexa visare

William Sandqvist william@kth.se

R L C

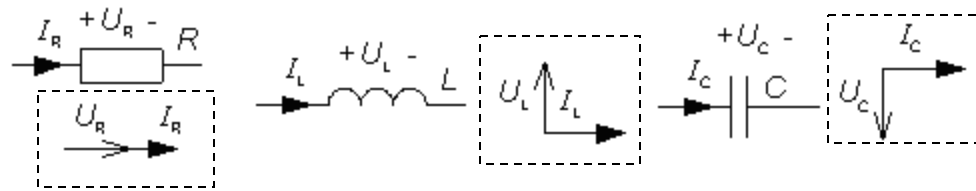


I allmänhet innehåller våra nät en blandning med olika R L och C . Fasvinkeln mellan I och U är då inte $\pm 90^\circ$ utan kan ha vilket värde som helst. En positiv fasvinkel innebär att induktanserna dominerar över kapacitanserna, induktiv karaktär **IND**. En negativ fasvinkel innebär att kapacitanserna dominerar över induktanserna, kapacitiv karaktär **KAP**. Kvoten mellan spänning U och ström I , växelströmsmotståndet, kallas för **impedans** Z [Ω]. **OHM's växelströmslag:**

$$Z = \frac{U}{I}$$

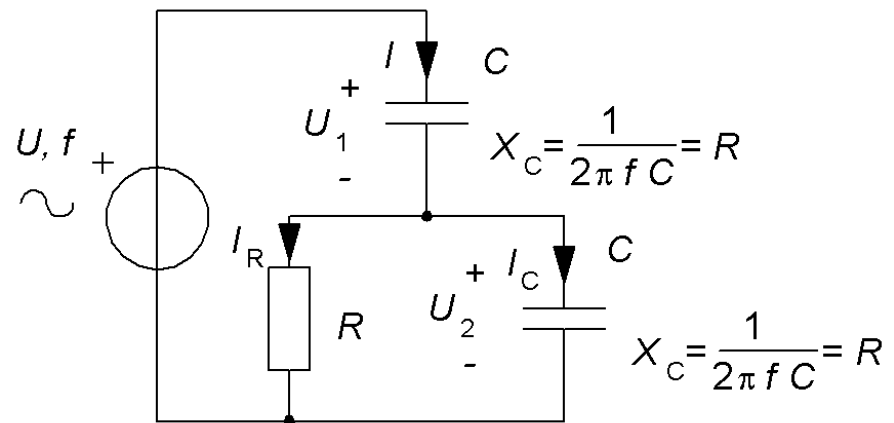
William Sandqvist william@kth.se

Exempel. Visardiagram.

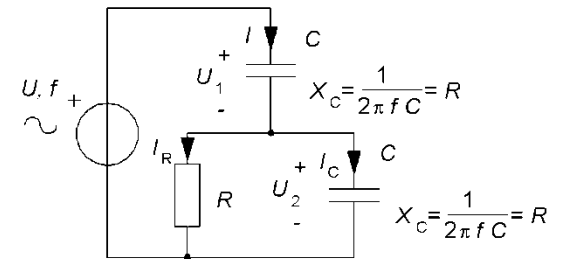
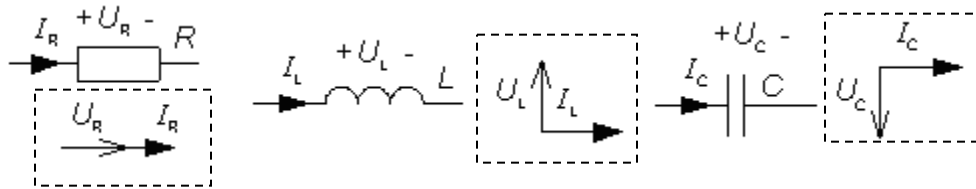


Vid en viss frekvens f har kondensatorernas reaktans X_C och resistorn R samma växelströmsmotstånd $[\Omega]$.

Använd de elementära visardiagrammen för R och C som byggstenar för att rita hela kretsens visardiagram (vid frekvensen f).



Exempel. Visardiagram.



1) U_2 riktfas (= horisontell)

2) $\bar{I}_R \parallel \bar{U}_2 \xrightarrow{U_R} \bar{I}_R$

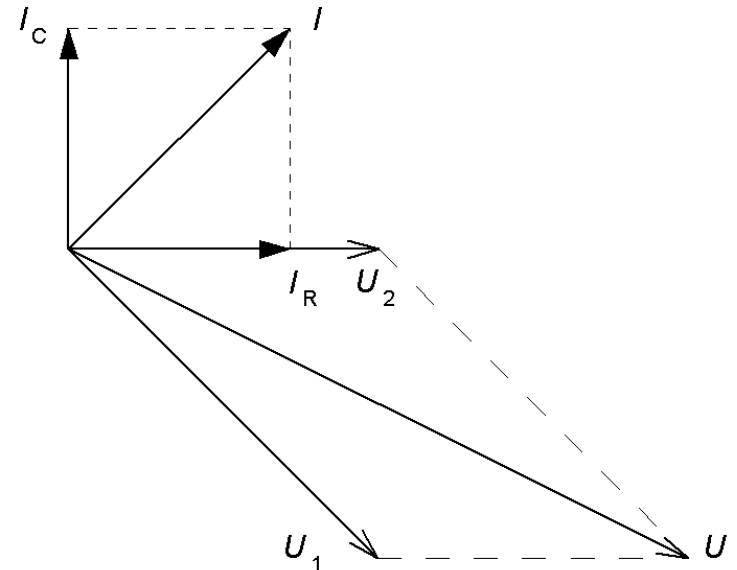
3) $\bar{I}_C \perp \bar{U}_2 \quad I_C = I_R = \frac{U_2}{R}$

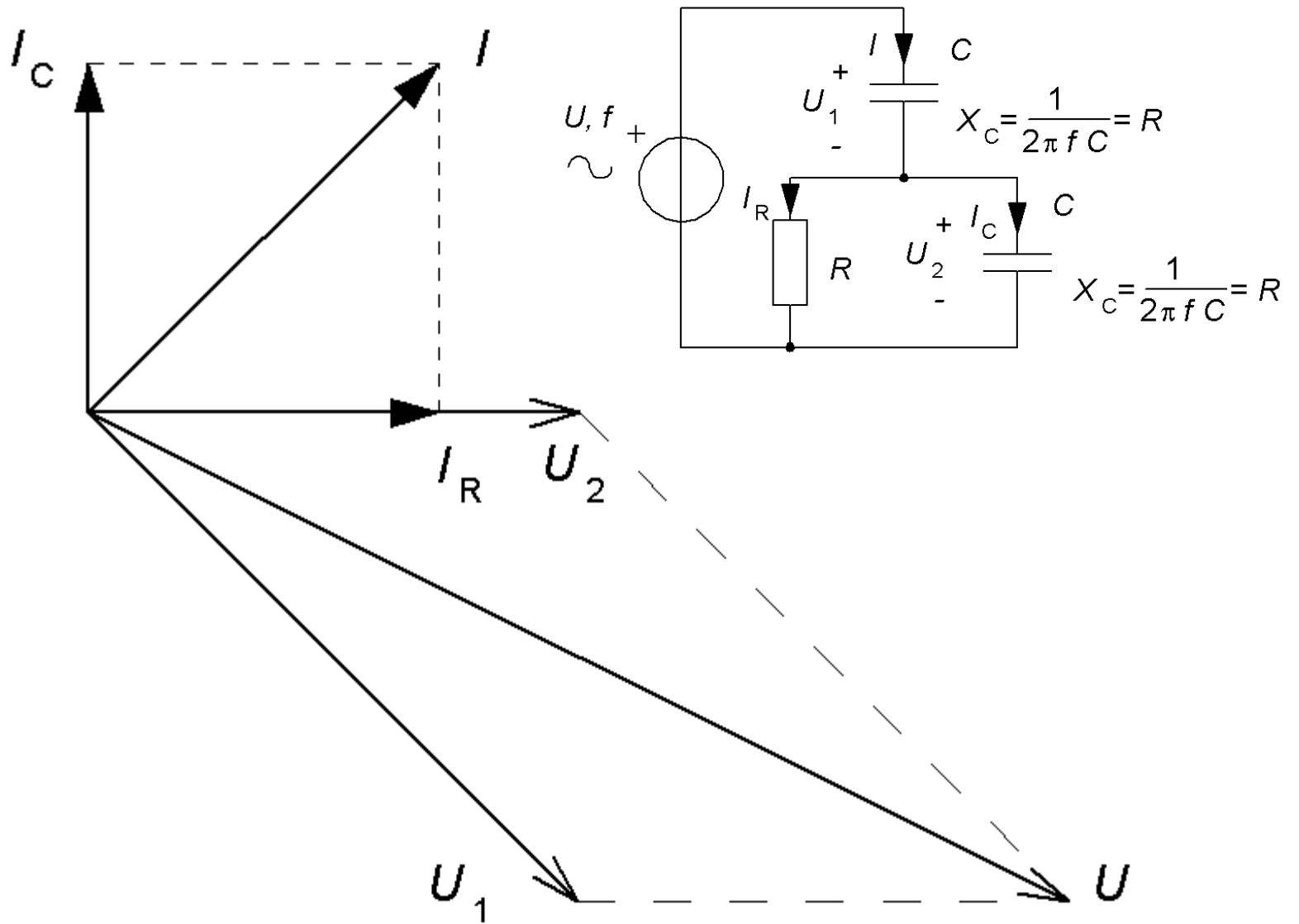
4) $\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_C \quad I = \sqrt{2} \cdot I_C$

5) $\bar{U}_1 \perp \bar{I}$

$$U_1 = I \cdot R = I_C \cdot \sqrt{2} \cdot R \Rightarrow U_1 = \sqrt{2} \cdot U_2$$

6) $\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2$



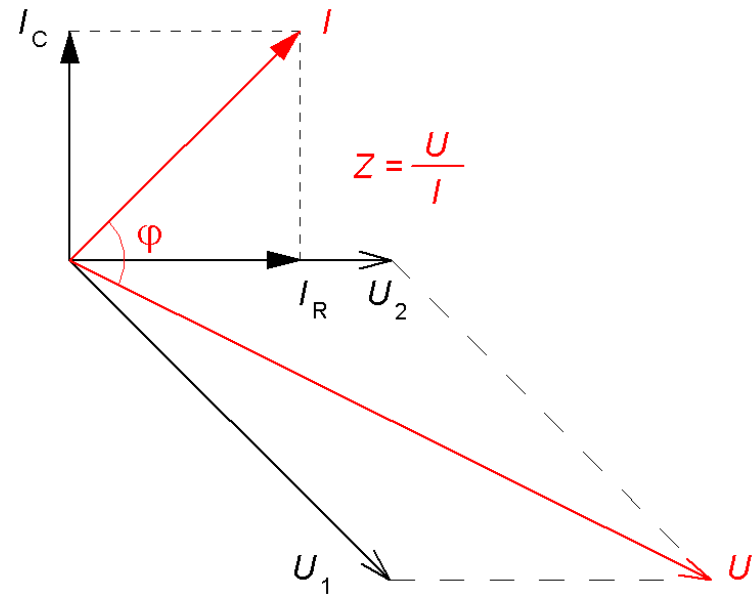
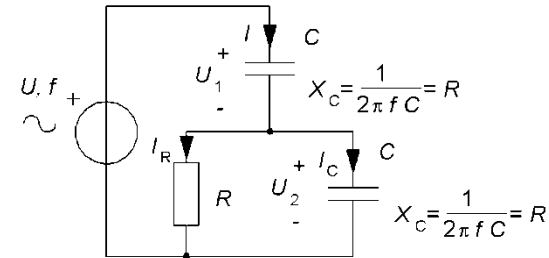


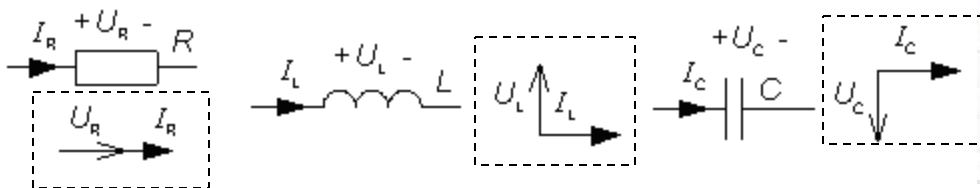
Impedansen Z

Kretsens växelströmsmotstånd, impedansen Z , får man som kvoten av U och I visarna. Fasvinkeln φ är vinkeln mellan U och I visarna.

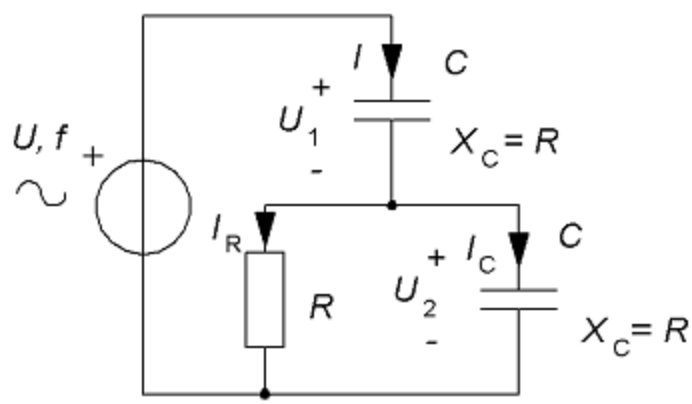
Strömmen ligger före spänningen i fas, så kretsen har kapacitiv karaktär, KAP.

(Något annat hade väl knappast varit att vänta eftersom det inte finns några spolar i kretsen)



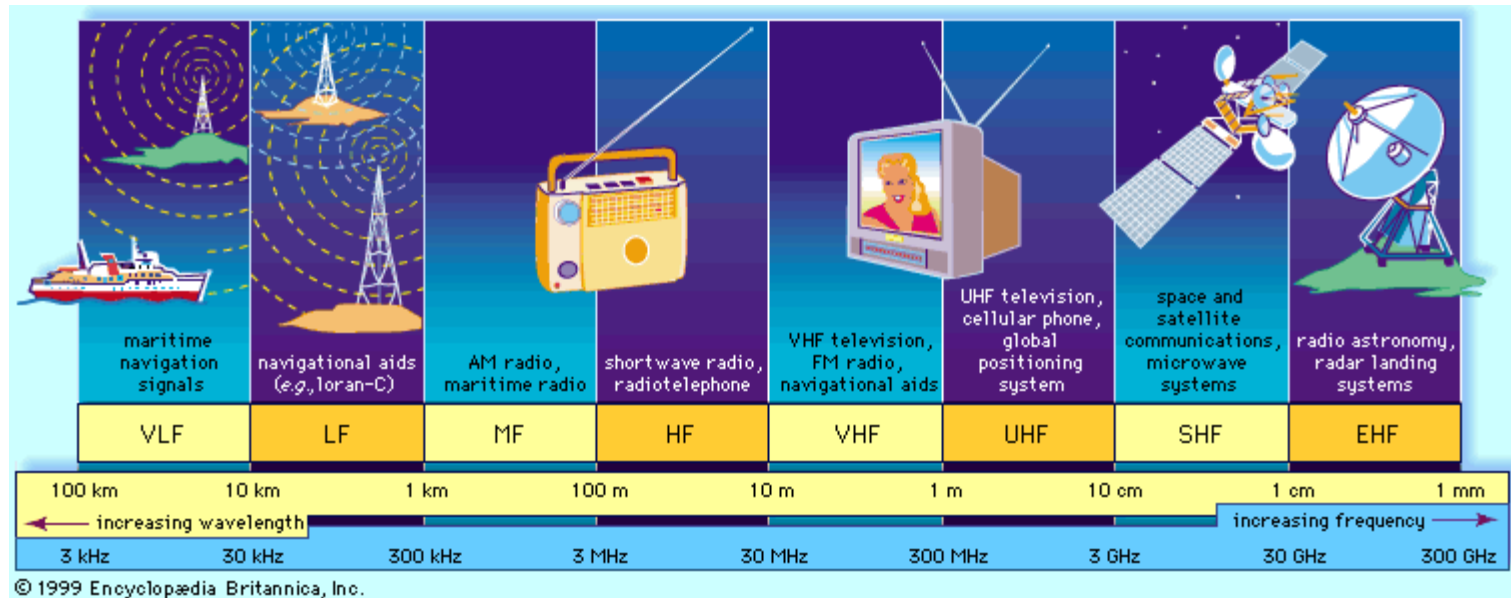


Gör själv ...



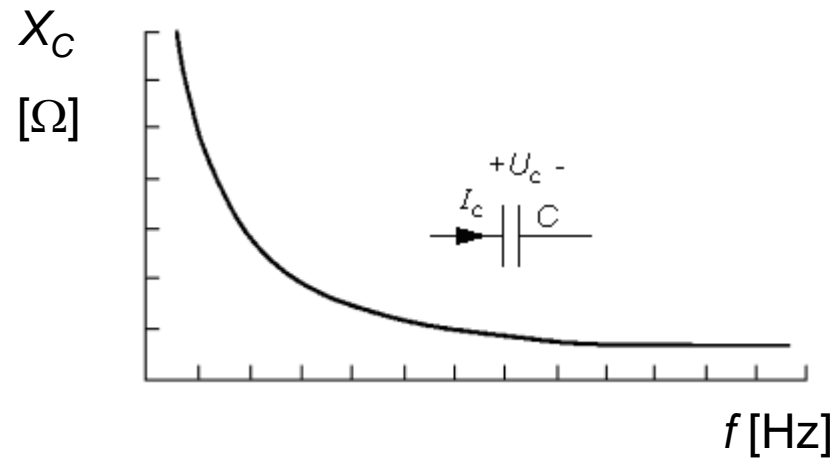
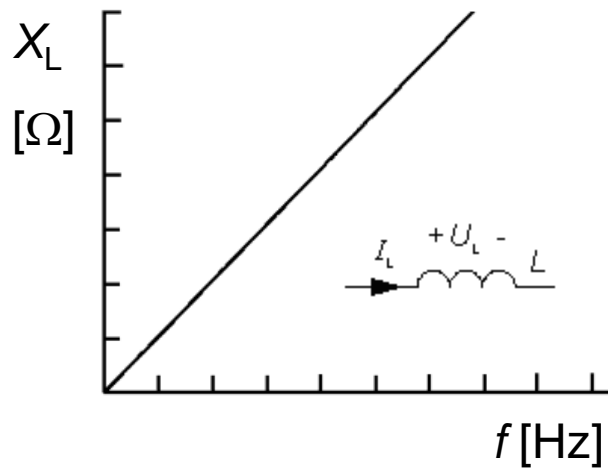
William Sandqvist william@kth.se

Reaktansens frekvensberoende



$$|X_L| = \omega \cdot L \quad |X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \omega = 2\pi \cdot f \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

Reaktansens frekvensberoende

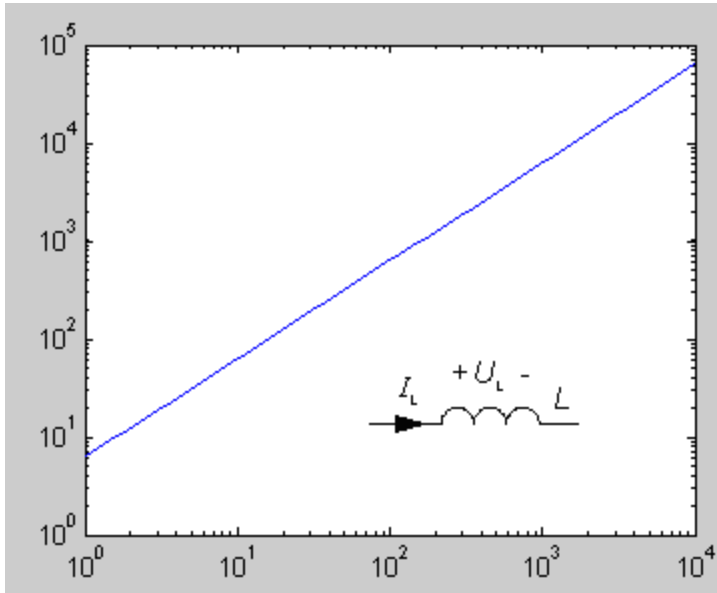


$$|X_L| = \omega \cdot L$$

$$|X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

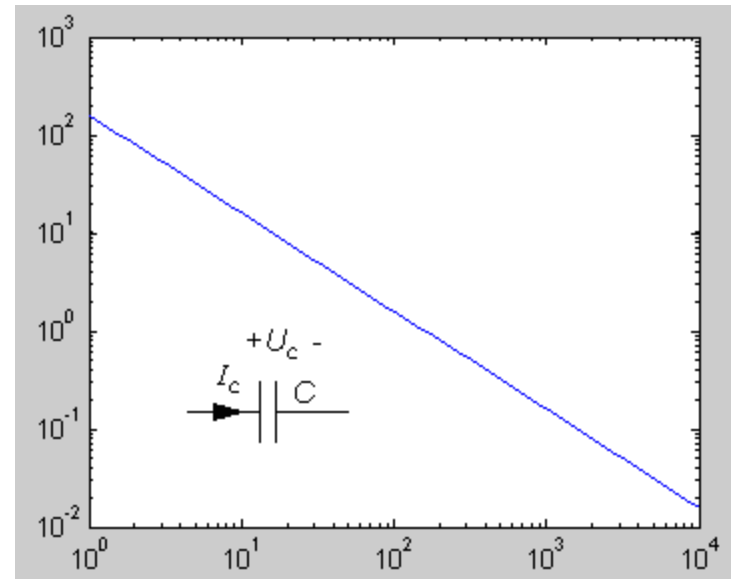
LOG – LOG diagram

$\log(X_L)$ – skala $[\Omega]$



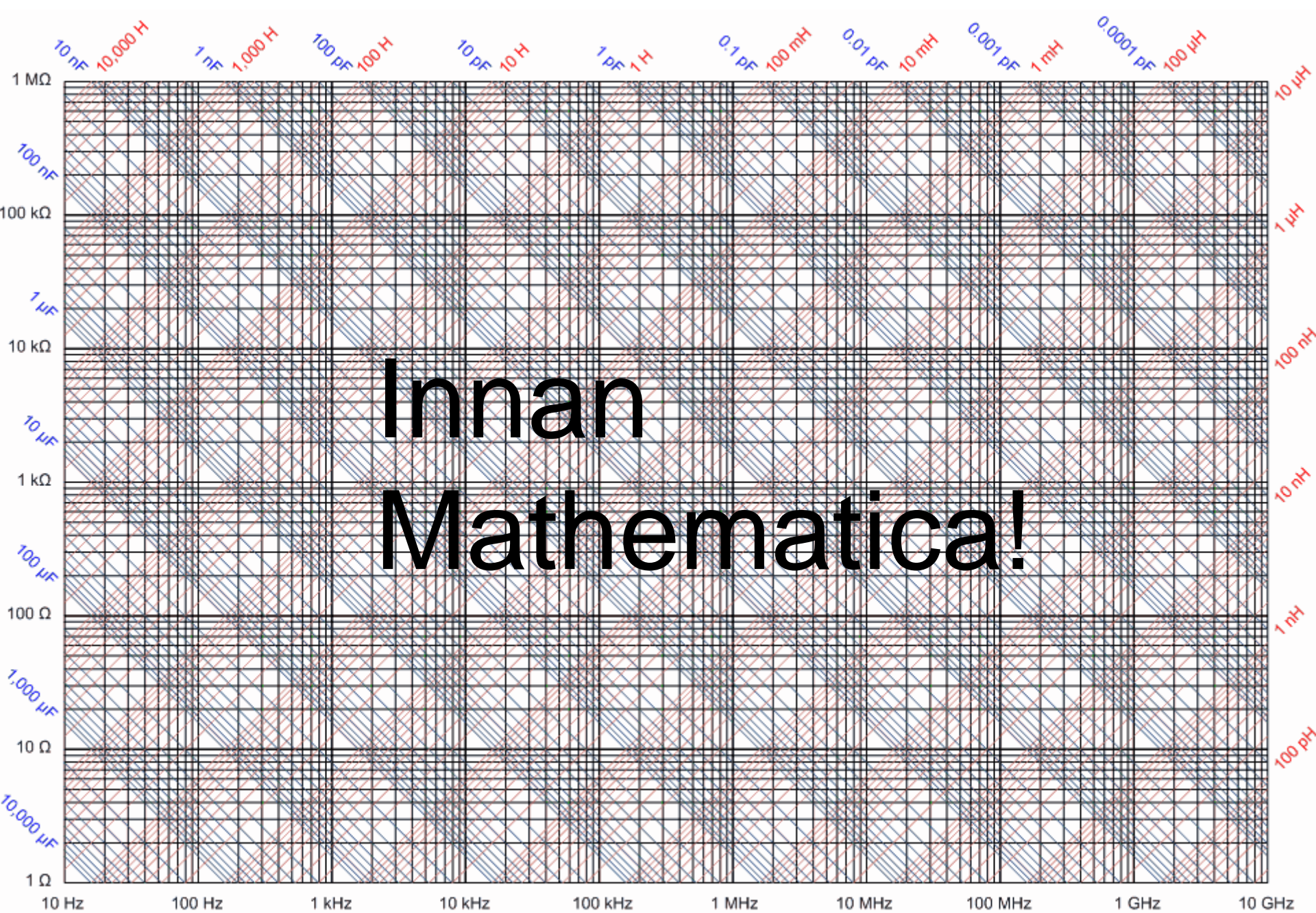
$\log(f)$ – skala [Hz]

$\log(X_C)$ – skala $[\Omega]$



$\log(f)$ – skala [Hz]

Spolens och kondensatorns frekvensberoende blir symmetriskt i log-log - skala



Innan Mathematica!

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} \Omega$$

Frequency – Reactance Nomograph

RF Cafe.com©

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L \Omega$$

William Sandqvist william@kth.se

Komplexa visare, $j\omega$ -metoden

Komplexa visare. OHM's lag för R L och C .

$$\underline{U}_R = \underline{I}_R \cdot R$$

$$\varphi = \arg(R) = 0^\circ$$

$$\underline{U}_L = \underline{I}_L \cdot jX_L = \underline{I}_L \cdot j\omega L$$

$$\varphi = \arg(j\omega L) = +90^\circ$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}_C \cdot jX_C = \underline{I}_C \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{1}{j\omega C}\right) = -\arg(j\omega C) = -90^\circ$$



Komplexa visare. OHM's lag för Z .

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$$

$$\operatorname{Re}[\underline{U}] = \operatorname{Re}[\underline{I} \cdot \underline{Z}]$$

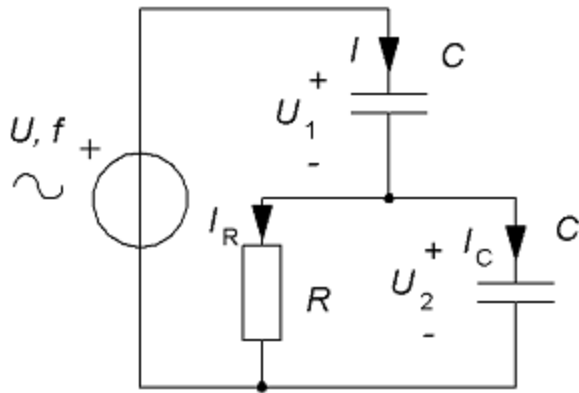
$$\arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}[\underline{Z}]}{\operatorname{Re}[\underline{Z}]}\right) = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$\operatorname{Im}[\underline{U}] = \operatorname{Im}[\underline{I} \cdot \underline{Z}]$$

*I själva verket blir det fyra användbara samband!
Re, Im, Abs, Arg*

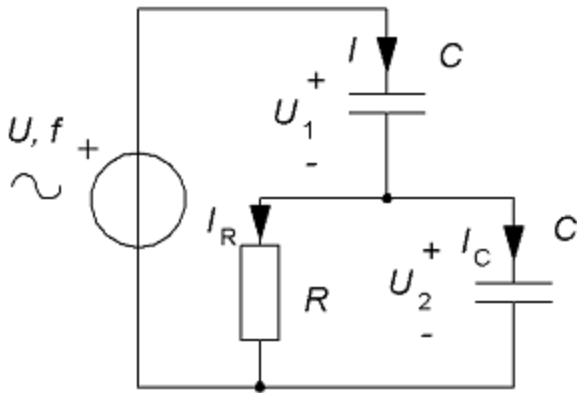
William Sandqvist william@kth.se

Exempel. Komplexa visare.



$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

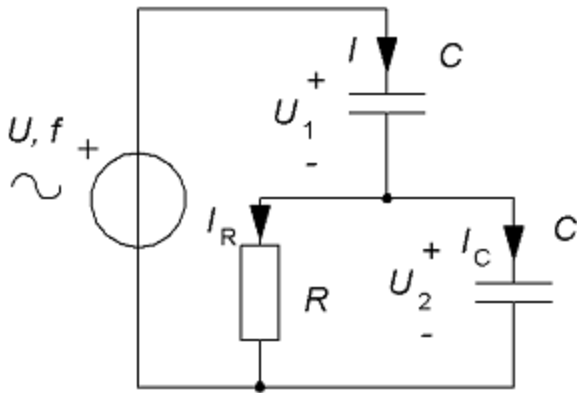
Exempel. Komplexa visare.



$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

Exempel. Komplexa visare.

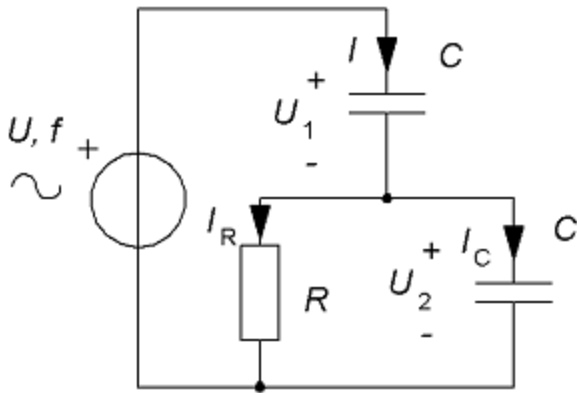


$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

Exempel. Komplexa visare.

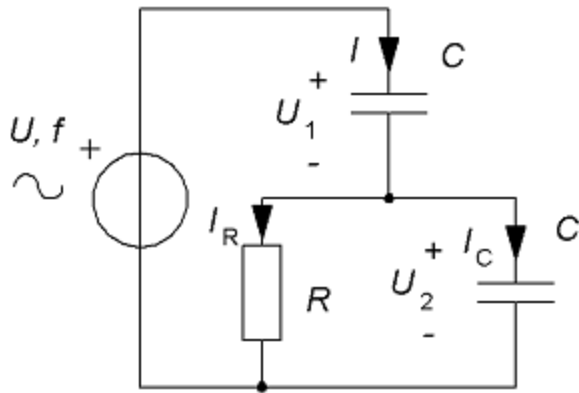


$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

Exempel. Komplexa visare. I

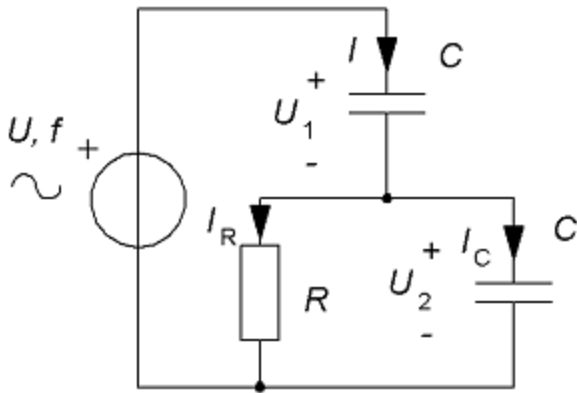


$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

Exempel. Komplexa visare. I



$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

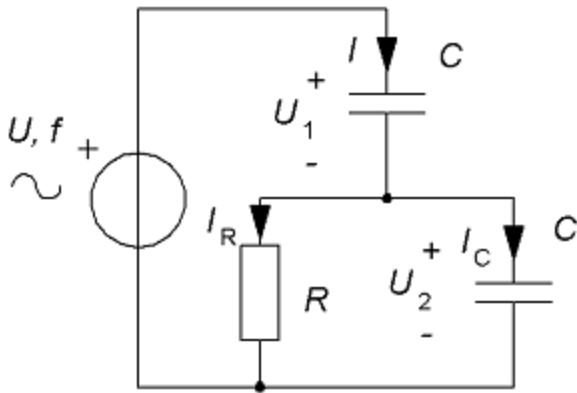
$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R//C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C} + \underline{Z}_{R//C}} = \frac{20}{-10j + (5 - 5j)} = \frac{4}{1 - 3j} \cdot \frac{(1 + 3j)}{(1 + 3j)} = 0,4 + 1,2j$$

$$I = |0,4 + 1,2j| = \sqrt{0,4^2 + 1,2^2} = 1,26$$

Exempel. Komplexa visare. U_1

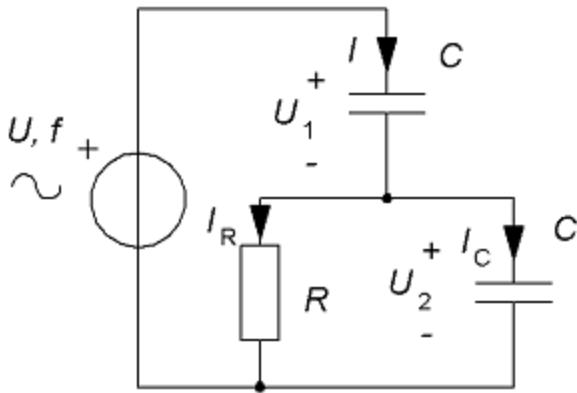


$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

Exempel. Komplexa visare. U_1



$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

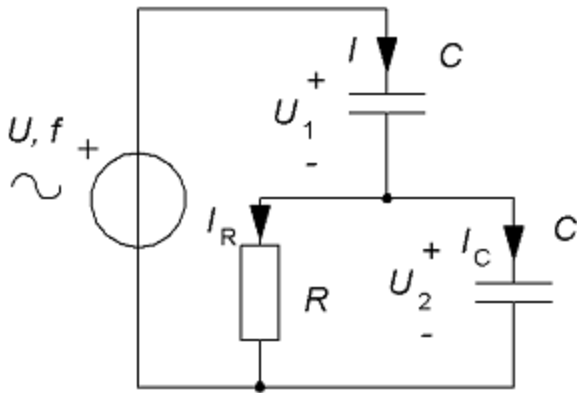
$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} = (0,4 + 1,2j) \cdot (-10j) = 12 - 4j$$

$$U_1 = |12 - 4j| = \sqrt{12^2 + (-4)^2} = 12,65$$

Exempel. Komplexa visare. U_2

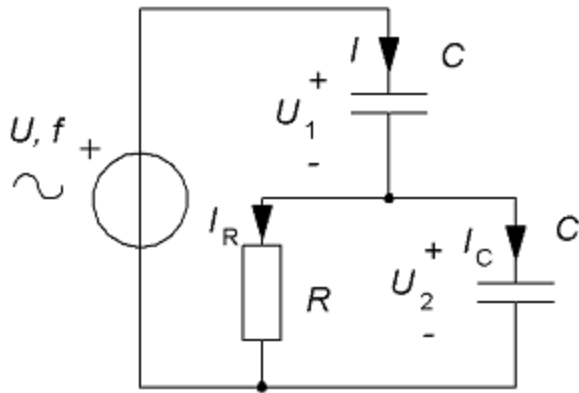


$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \mu\text{F} \quad R = 10 \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

Exempel. Komplexa visare. U_2



Spännings delning

$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

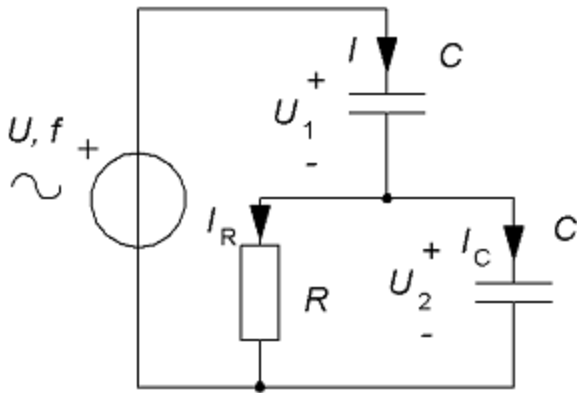
$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R//C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_{R//C}}{\frac{1}{j\omega C} + \underline{Z}_{R//C}} = 20 \cdot \frac{5 - 5j}{-10j + (5 - 5j)} = 20 \cdot \frac{1 - j}{1 - 3j} \cdot \frac{(1 + 3j)}{(1 + 3j)} = 8 + 4j$$

$$U_2 = |8 + 4j| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8,94$$

Exempel. Komplexa visare. I_C

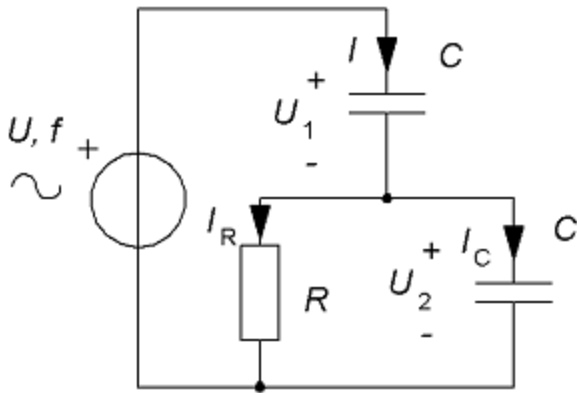


$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

Exempel. Komplexa visare. I_C



$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \mu\text{F} \quad R = 10 \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

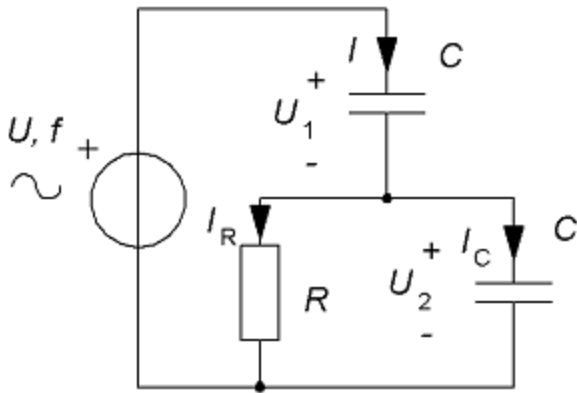
$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

$$\underline{I}_C = \frac{U_2}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{8 + 4j}{-10j} = -0,4 + 0,8j$$

$$I_C = |0,4 + 0,8j| = \sqrt{0,4^2 + 0,8^2} = 0,89$$

Exempel. Komplexa visare. I_R

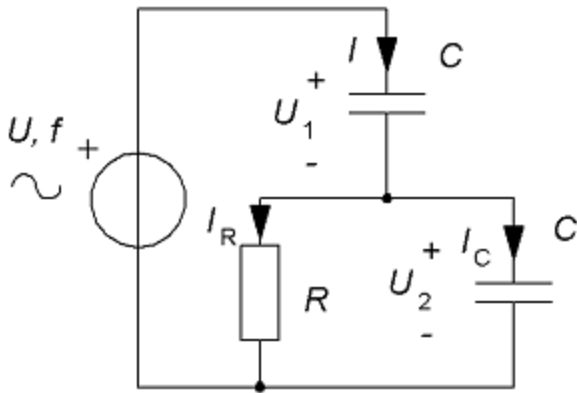


$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

Exempel. Komplexa visare. I_R



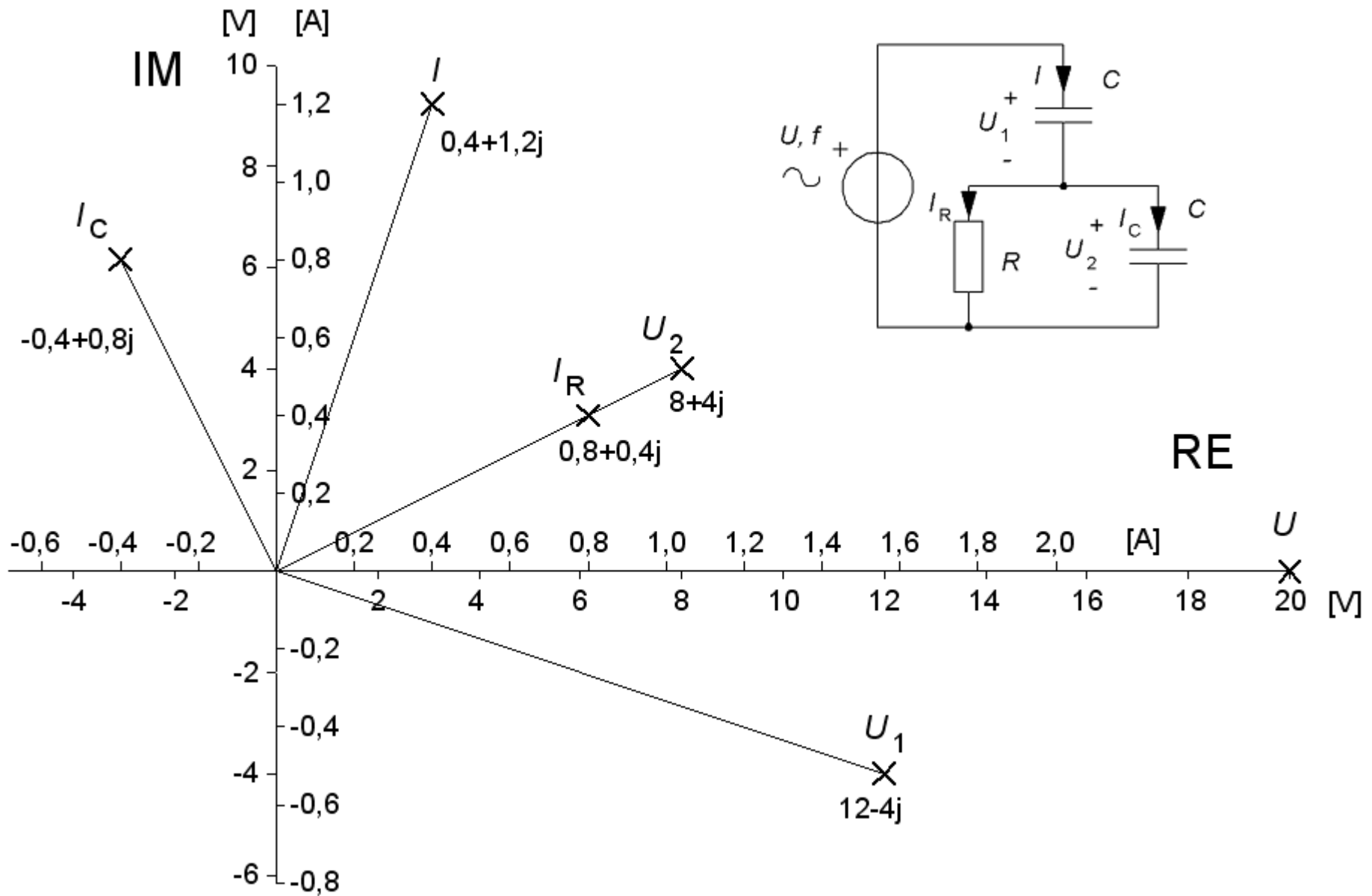
$$U = 20 \text{ V} \quad C = 320 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 10 \text{ } \Omega \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = -10j$$

$$\underline{Z}_{R/C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10 \cdot (-10j)}{10 - 10j} \cdot \frac{(10 + 10j)}{(10 + 10j)} = 5 - 5j$$

$$\underline{I}_R = \frac{U_2}{R} = \frac{8 + 4j}{10} = 0,8 + 0,4j$$

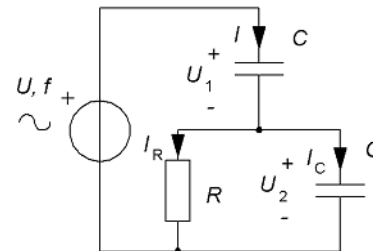
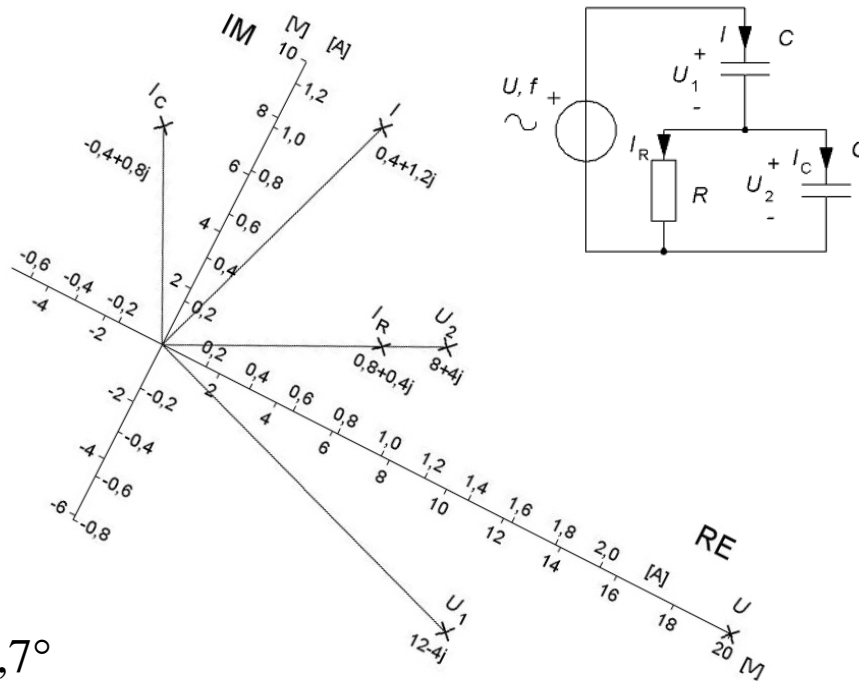
$$I_R = |0,8 + 0,4j| = \sqrt{0,8^2 + 0,4^2} = 0,89$$



Vrida diagrammet ...

När vi ritade visardiagrammet var det naturligt att använda U_2 som riktfas (=horisontell), med $j\omega$ -metoden var U den naturliga riktfasen (=reell).

Eftersom det är enkelt att vrida diagrammen, så har man i praktiken frihet att välja vilken storhet som helst till riktfas.



$$\arg(\underline{U}_2) = \arg(8 + 4j) = \arctan\left(\frac{4}{8}\right) = 26,7^\circ$$

$\times (\cos(-26,7^\circ) + j \cdot \sin(-26,7^\circ))$ *Multipluera alla komplexa tal med denna faktor så genomförs vridningen!*

William Sandqvist william@kth.se

Sammanfattning

Sinusformade växelstorheter kan representeras som visare, phasors,

"belopp" \angle "fasvinkel".

En visare (phasor) kan *antingen* ses som en vektor angiven i polära koordinater, *eller* som ett komplext tal.

Det är viktigt att kunna beskriva växelströmsfenomenen *utan* att för den skull behöva *kräva* kunskaper om komplexa tal – därav vektormetoden.

De komplexa talen och $j\omega$ -metoden är kraftfulla verktyg som underlättar behandlingen av växelströms-problem.

Inom elektroniken har de generaliserats till olika transform-metoder som Fourier-transformen och Laplace-transformen, så elektroingenjörrens användning av komplexa tal är omfattande.

William Sandqvist william@kth.se

Admittans, konduktans, susceptans

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} \quad \underline{Z} = R + jX \quad R = \operatorname{Re}[\underline{Z}] \quad X = \operatorname{Im}[\underline{Z}]$$

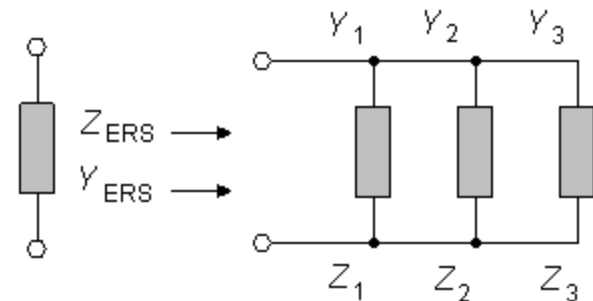
$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} \quad \underline{Y} = G + jB \quad G = \operatorname{Re}[\underline{Y}] \quad B = \operatorname{Im}[\underline{Y}]$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Vid parallellkopplade komponenter kan det ibland vara bekvämare att räkna med impedansens inverterade värde.

Impedansen Z består av realdel R , **resistans**, och imaginärdel X , **reaktans**.
Kondensatorns reaktans är negativ.

Admittansen Y består av realdel G , **konduktans**, och imaginärdel B , **susceptans**. Spolens susceptans är negativ.



$$Y_{ERS} = Y_1 + Y_2 + Y_3$$
$$\frac{1}{Z_{ERS}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

William Sandqvist william@kth.se