



SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Tentamen
Måndagen den 16 mars 2015

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
- (a) Skissa nivåkurvorna $f(x, y) = c$ till f för $c = 0$, $c = -1$ och $c = -2$. **(1 p)**
 - (b) Beräkna $\text{grad} f(x, y)$ i de fyra punkterna $(\pm 1, \pm 1)$, på nivåkurvan $f(x, y) = -1$ och rita in dessa vektorer i figuren. **(2 p)**
 - (c) Vi vill också studera funktionen $g(x, y) = \sqrt{f(x, y)}$. I vilka punkter (x, y) i \mathbb{R}^2 är funktionen g väldefinierad? Skissera denna punktmängd. **(1 p)**

2. Området D i xy -planet beskrivs av olikheterna $0 \leq x \leq 2y \leq 3$.

- (a) Gör en skiss över området D . **(2 p)**
- (b) Beräkna integralen

$$\iint_D e^{y^2} dx dy$$

genom upprepad integration med början i x -led. **(2 p)**

3. Funktionen f som ges av $f(x, t) = \sin(3x - 4t)$ uppfyller den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

där c är en konstant.

- (a) Bestäm konstanten c . **(2 p)**
- (b) Visa att $u(x, t) = g(3x - 4t)$ och $v(x, t) = g(3x + 4t)$ är lösningar till samma differentialekvation om g är en godtycklig två gånger deriverbar funktion. **(2 p)**

DEL B

4. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x, y) = y^2 + 4x^2 - x^4$. Om man fyller den skål som funktionsytan $z = f(x, y)$ bildar nära origo med vatten, till vilken höjd kan skålen fyllas? **(4 p)**

5. (a) Bestäm en parameterkurva γ som startar i punkten $(1, 0, 1)$, slutar i punkten $(0, 1, 1)$ och ligger på ytan $z = x^2 + y^2$. **(1 p)**
 (b) Skriv upp den enkelintegral som behövs för att beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (y^2 + z) dx + 2xy dy + x dz$$

där γ är kurvan från deluppgift (a). **(1 p)**

- (c) Vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z, 2xy, x)$ är konservativt och kurvintegralen i deluppgift (b) kan beräknas med hjälp av en potential. Beräkna kurvintegralen med hjälp av potentialen eller genom att beräkna enkelintegralen från deluppgift (b). **(2 p)**

6. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^x \cos(y) = a, \\ e^y \sin(z) + y^2 = b, \\ e^z \cos(x) = c. \end{cases}$$

- (a) Skriv en Matlab-funktion $[x, y, z] = G(a, b, c)$ som löser systemet med Newtons metod för givna värden på (a, b, c) nära $(3, 1, 3)$. Systemet har då en rot nära $(x, y, z) = (1, 0, 2)$. Felet i varje komponent ska vara mindre än 10^{-10} . **(3 p)**
 (b) Antag att högerleden är givna som $a = 3 \pm 0,1$, $b = 1 \pm 0,05$ och $c = 3 \pm 0,2$. Skriv ett Matlab-program som uppskattar osäkerheten i lösningens x -komponent med hjälp av funktionen från deluppgift (a). Programmet ska anropa funktionen högst fyra gånger. **(1 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Betrakta vektorfältet \mathbf{F} som ges av

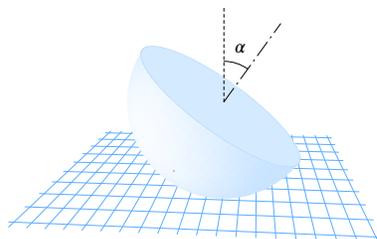
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (ax^2 + xy, xy + y^2, byz + b),$$

där a och b är konstanter.

- (a) Bestäm konstanterna a och b så att fältet blir källfritt.¹ (2 p)
- (b) Beräkna flödet av \mathbf{F} genom den del av ytan $x^2 + y^2 + 2z^2 = 3$ som uppfyller $z \geq 0$ för dessa värden på a och b . (2 p)

8. Betrakta en cylinder parallell med z -axeln och med botten vid $z = 0$. Cylindern har höjden h , tvärsnittsarean A och densitetsprofilen $\rho(x, y, z) = 1 + z$. Uppskatta felgränsen för cylinderns massa om $h = 1 \pm 0,01$ cm och $A = 2 \pm 0,04$ cm². (4 p)

9. Ett massivt halvklot K med radie a och konstant densitet ρ placeras på ett horisontellt plan med den sfäriska delen av ytan nedåt och så att dess symmetriaxel bildar vinkeln α mot vertikalen.



Bestäm halvklotets potentiella energi

$$W = \iiint_K \rho g z \, dx dy dz,$$

där z anger höjden ovanför planet och g är tyngdkraftaccelerationen. (4 p)

¹Källfritt är det samma som *divergensfritt*.