

SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Femtonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

19 februari 2015

Trippelintegraler

På samma sätt som vi delade in rektanglar i mindre rektanglar kan vi dela in rätblock i mindre rätblock. Därmed kan vi definiera **Riemannintegralen** för funktioner i tre variabler över ett rätblock Δ :

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) \, dx dy dz$$

Definition

Ett område i \mathbb{R}^3 är **kvadrerbart** om dess rand är en **nollmängd**, dvs kan täckas av rätblock av godtyckligt liten sammanlagd volym.

Definition

En funktion är **integrerbar** på ett kvadrerbart område om **översummor** och **undersummor** kommer godtyckligt nära varandra när indelningen blir tillräckligt fin.

Integration av kontinuerliga funktioner på kompakta mängder

Sats

En kontinuerlig funktion på en kompakt kvadrerbar mängd i \mathbb{R}^3 är integrerbar.

Fråga

Är $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ integrerbar på området där $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ och $-2 \leq z \leq 2$?

- A. Ja
- B. Nej
- C. Vet ej

Variabelbyte i trippelintegraler

Vid variabelbyte

$$\begin{cases} x = g_1(u, v, w) \\ y = g_2(u, v, w) \\ z = g_3(u, v, w) \end{cases}$$

behöver vi använda Jacobianen

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

och får

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, du dv dw \end{aligned}$$

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

ger oss sfäriska koordinater och Jacobianen blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} &= \det \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{bmatrix} \\ &= (\cos \phi)(r^2 \cos \phi \sin \phi) \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &\quad - (-r \sin \phi)(r \sin^2 \phi) \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = r^2 \sin \phi \end{aligned}$$

Volymsberäkning

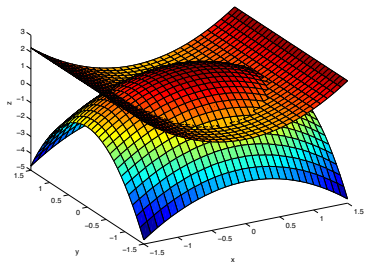
Vi kan beräkna volymen av området K mellan två grafer $z = f(x, y)$ och $z = g(x, y)$ genom

$$\iiint_K 1 \, dx dy dz = \iint_D g(x, y) - f(x, y) \, dx dy$$

där D är området där $f(x, y) \leq z \leq g(x, y)$.

Exempel (SF1626 –
Tentamen 2013-05-27,
Uppgift 2)

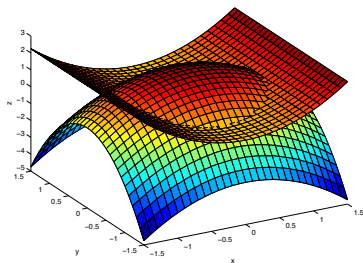
Beräkna volymen av det område som begränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - x^2 - 2y^2$.



Volymsberäkning

Exempel (SF1626 –
Tentamen 2013-05-27,
Uppgift 2)

Beräkna volymen av det område som begränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - x^2 - 2y^2$.



Fråga

Var börjar vi?

- Beskriva området
- Välja koordinater (rektangulära, polära, andra?)
- Välja integrationsmetod (mellan grafer eller med nivåkurvor)

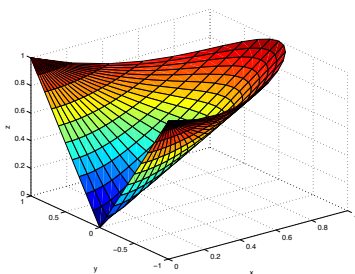
Area av en yta

Vi kan beräkna arean av en yta som parametriseras av $\mathbf{r}(s, t)$ genom

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt$$

Exempel (SF1626 –
Tentamen 2013-05-27,
Uppgift 5)

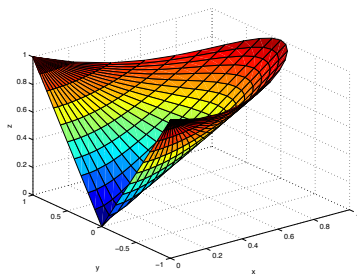
Beräkna arean av den del S av
den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
som ligger över området
 $0 \leq x \leq 1 - y^2$ i xy -planet.



Area av en yta

Exempel (SF1626 –
Tentamen 2013-05-27,
Uppgift 5)

Beräkna arean av den del S av
den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
som ligger över området
 $0 \leq x \leq 1 - y^2$ i xy -planet.



Fråga

Var börjar vi?

- A. Välja parametrisering av ytan
- B. Välja koordinater (rektangulära, polära, andra?)
- C. Välja integrationsmetod

Tröghetsmoment

Rörelseenergin för en stelkropp K under rotation med en vinkelhastighet ω ges av $J\omega^2/2$ där

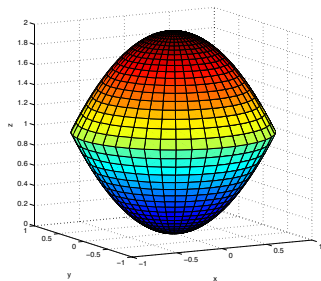
$$J = \iiint_K \rho(x, y, z) D^2(x, y, z) dx dy dz$$

där $D(x, y, z)$ är avståndet från (x, y, z) till rotationsaxeln.

Exempel (Tentamen 2013-01-10, Uppgift 3)

Kroppen K ges av
 $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.
Beräkna tröghetsmomentet
m.a.p. z-axeln, dvs

$$\iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz$$

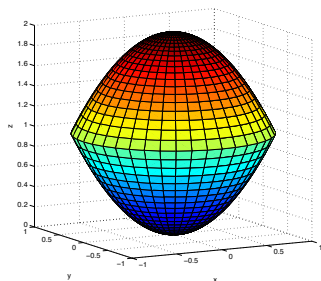


Tröghetsmoment

Exempel (Tentamen
2013-01-10, Uppgift 3)

Kroppen K ges av
 $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.
Beräkna tröghetsmomentet
m.a.p. z-axeln, dvs

$$\iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz$$



Fråga

Var börjar vi?

- A. Beskriva kroppen
- B. Välja koordinater (rektangulära, sfäriska eller cylindriska)
- C. Välja integrationsmetod (nivåytor eller mellan grafer)

Tyngdpunkt

Vi kan beräkna tyngdpunkten hos en stel kropp K genom

$$(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{V} \iiint_K (x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

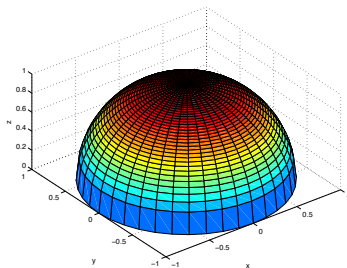
där V är kroppens volym.

Exempel (Tentamen 2013-08-22, Uppgift 6)

Låt K vara ett homogent halvklot som har radie R , medelpunkt i origo och ligger över xy -planet. Beräkna z -koordinaten för kroppen K 's masscentrum, dvs

$$\frac{1}{V} \iiint_K z dx dy dz$$

där V är volymen av K .



Medelvärden

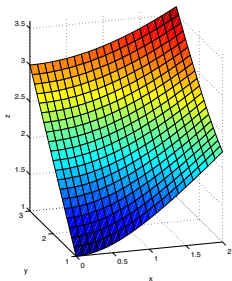
Vi kan beräkna medelvärden över områden genom

$$m_K(f) = \frac{\iiint_K f(x, y, z) \, dx dy dz}{\iiint_K 1 \, dx dy dz}$$

i rummet eller

$$m_D(f) = \frac{\iint_D f(x, y) \, dx dy}{\iint_D 1 \, dx dy}$$

i planet.



Exempel

Bestäm det genomsnittliga avståndet till origo från punkter i rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 3$, dvs beräkna

$$\frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy.$$