SF1665 Tillämpad flervariabelanalys med numeriska metoder

Tolfte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

21 februari 2014

Generaliserade dubbelintegraler

När området är obegränsat behöver vi generaliserade dubbelintegraler.
För att vara säker på att den är väldefinierad ser vi om både den positiva delen och den negativa delen är konvergenta.
Skriv

$$f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$$

där $f^+(x,y) \geq 0$ och $f^-(x,y) \geq 0$.

Definition

Den generaliserade integralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ är konvergent om det finns tal M^+ och M^- så att

$$\iint_\Omega f^+(x,y)\,dxdy < M^+ \quad \text{och} \quad \iint_\Omega f^-(x,y)\,dxdy < M^-$$

för varje kompakt kvadrerbart delområde Ω av D.

Generaliserade integraler

Fråga

Är integralen $\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$ *konvergent på området* D *som ges av* $x^2+y^2 \geq 1$ *?*

A. Ja

B. Nej

C. Vet ej

Trippelintegraler

På samma sätt som vi delade in rektanglar i mindre rektanglar kan vi dela in rätblock i mindre rätblock. Därmed kan vi definiera Riemannintegralen för funktioner i tre variabler över ett rätblock Δ:

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z)\, dxdydz$$

Definition

Ett område i $\mathbb{R}^3$ är kvadrerbart om dess rand är en nollmängd, dvs kan täckas av rätblock av godtyckligt liten sammanlagd volym.

Definition

En funktion är integrerbar på ett kvadrerbart område om översummor och undersummor kommer godtyckligt nära varandra när indelningen blir tillräckligt fin.

Integration av kontinuerliga funktioner på kompakta mängder

Sats

En kontinuerlig funktion på en kompakt kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^3$ *är integrerbar.*

Fråga

Är $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *integrerbar på området där* $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ *och* $-2 \leq z \leq 2$*?*

A. Ja

B. Nej

C. Vet ej

Variabelbyte i trippelintegraler

Vid variabelbyte

$$\begin{cases} x &= g_1(u,v,w) \\ y &= g_2(u,v,w) \\ z &= g_3(u,v,w) \end{cases}$$

behöver vi använda Jacobideterminanten

$$J(u,v,w) = \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

och får

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iiint_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw$$

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

ger oss sfäriska koordinater och

$$J(r,\theta,\varphi) = \det\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\cos\theta)(r^2\cos\theta\sin\theta)\det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$-(-r\sin\theta)(r\sin^2\theta)\det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = r^2\sin\theta$$

Integration med nivåytor

Om $f(x,y,z)$ kan skrivas om $h(g(x,y,z))$ och området ges av $a \leq g(x,y,z) \leq c$ kan vi integrera med nivåytor:

$$\iiint_D h(g(x,y,z))\, dxdydz = \int_a^b h(u) V'(u)\, du$$

där $V(u)$ är volymen av området i D där $g(x,y,z) \leq u$.

Exempel

Om D ges av $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ är

$$\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz = \int_1^2 r^{-2} \cdot 4\pi r^2\, dr = 4\pi,$$

eftersom $V(r) = 4\pi(r^3-1)/3$ och $V'(r) = 4\pi r^2$.