Extremvärden

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

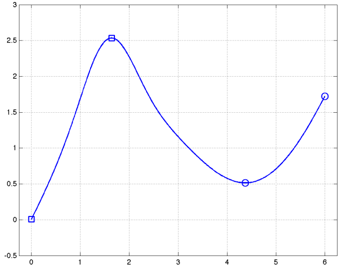
SF1669, VT 2015

Lokala och globala max/min

Betraka $f(\boldsymbol{x})$ definierad för $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$.

- Lokalt maximum i $\boldsymbol{x}_0$ när $f(\boldsymbol{x}_0) \geq f(\boldsymbol{x})$ för alla $\boldsymbol{x}$ i någon omgivning av $\boldsymbol{x}_0$
- Globalt maximum i $\boldsymbol{x}_0$ när $f(\boldsymbol{x}_0) \geq f(\boldsymbol{x})$ för alla $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$

(Analogt för lokalt/global min.)

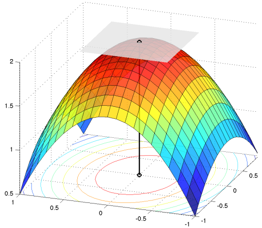


Sats

Om f kontinuerlig och $\mathcal{D}$ kompakt (=sluten och begränsad)
$\Rightarrow$ globala max- och min-punkter existerar.

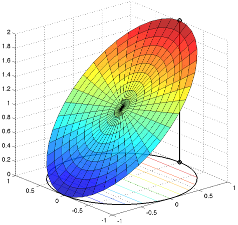
Nödvändiga villkor för extremvärden

Om $\boldsymbol{x}_0$ är lokal extrempunkt till f i $\mathcal{D}$ är $\boldsymbol{x}_0$ en av följande:



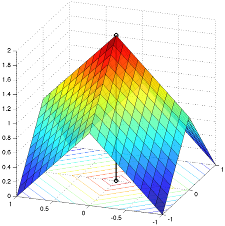
Kritisk punkt

$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$



Randpunkt

$\boldsymbol{x}_0 \in \partial\mathcal{D}$



Singulär punkt

$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ existerar ej

Klassificering av kritiska punkter

Antag $\boldsymbol{x}_0$ kritisk punkt dvs $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$ (och f snäll).

Bilda Hessianen $\boldsymbol{H}$, dvs matrisen av andraderivator, ex

$$f = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Klassificering av kritiska punkter

Antag $\boldsymbol{x}_0$ kritisk punkt dvs $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$ (och f snäll).

Bilda Hessianen $\boldsymbol{H}$, dvs matrisen av andraderivator, ex

$$f = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Då gäller

- $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ positivt definit $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}_0$ lokalt min
  (dvs alla egenvärden positiva)

Klassificering av kritiska punkter

Antag $\boldsymbol{x}_0$ kritisk punkt dvs $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$ (och f snäll).

Bilda Hessianen $\boldsymbol{H}$, dvs matrisen av andraderivator, ex

$$f = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Då gäller

- $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ positivt definit $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}_0$ lokalt min (dvs alla egenvärden positiva)
- $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ negativt definit $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}_0$ lokalt max (dvs alla egenvärden negativa)

Klassificering av kritiska punkter

Antag $\boldsymbol{x}_0$ kritisk punkt dvs $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$ (och f snäll).

Bilda Hessianen $\boldsymbol{H}$, dvs matrisen av andraderivator, ex

$$f = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Då gäller

- $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ positivt definit $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}_0$ lokalt min
  (dvs alla egenvärden positiva)
- $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ negativt definit $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}_0$ lokalt max
  (dvs alla egenvärden negativa)
- $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ indefinit $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}_0$ sadelpunkt
  (dvs både positiva och negativa egenvärden)