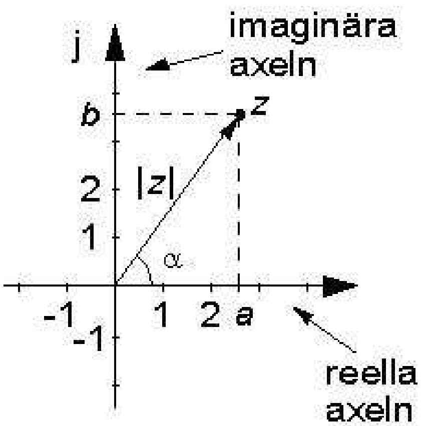
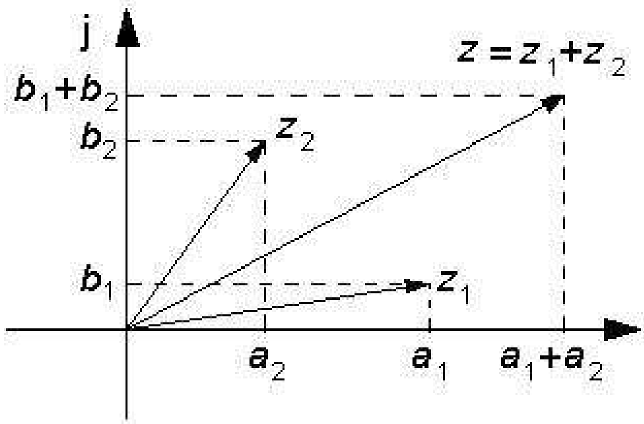
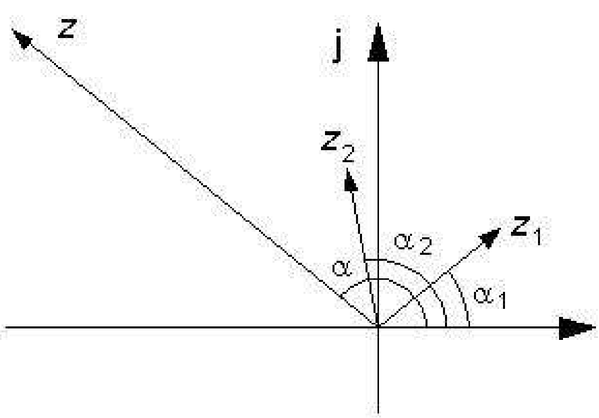
Häfte: repetition om komplexa tal







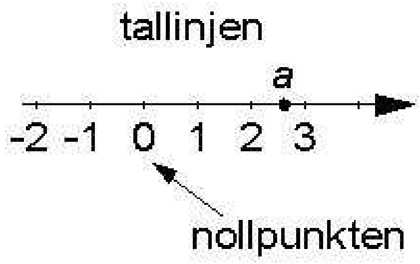
© *William Sandqvist* 2004

Repetition, komplexa tal ...

Räkneregler för komplexa tal

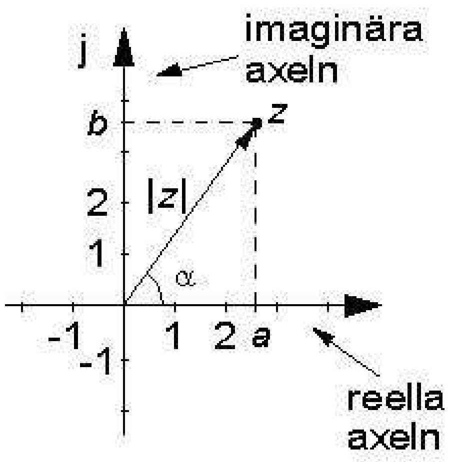
Definitioner

Ett vanligt, **reellt tal** *a* brukar man åskådliggöra som en punkt på den s.k. tallinjen. Talets storlek representeras av avståndet från punkten ifråga till tallinjens nollpunkt.



Ett komplext tal *z* består av två komponenter. Det kan skrivas *a*+ j*b*. Här är *a* och *b* reella tal. j är roten ur -1 och kallas den imaginära enheten. *a* är det komplexa talets realdel Re(*z*). *b* är dess imaginärdel, Im(*z*).

Varje komplext tal kan åskådliggöras som en punkt i ett tvådimensionellt koordinatsystem, **det komplexa talplanet**.



Talet *z* representeras av en punkt med koordinaterna *a* och *b*.

Avståndet från talpunkten till origo representerar talets **belopp** eller talvärde |z|. För detta gäller

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

eller generellt

$$|z| = \sqrt{\left[\mathrm{Re}(z)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(z)\right]^2}$$

Vinkeln α kallas argumentet för *z*, arg(*z*) och som framgår av figuren gäller

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

Generellt gäller

$$\arg(z) = \alpha = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + n \cdot 2\pi \qquad a > 0$$

$$\arg(z) = \alpha = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + \pi + n \cdot 2\pi \qquad a < 0$$

Vi kan också uttrycka *z* i **polär form**, dvs i |*z*| och α. Så som framgår direkt av figuren gäller

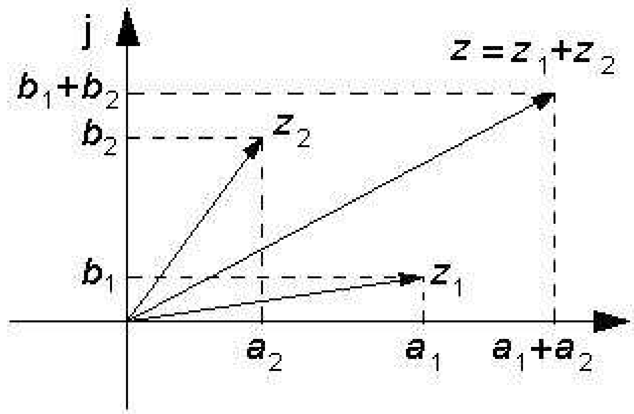
$$a = |z|\cos(\alpha) \qquad b = |z|\sin(\alpha)$$
$$z = |z|(\cos(\alpha) + \mathrm{j} \cdot \sin(\alpha))$$

Man kan då tänka sig att det är förbindelselinjen mellan talpunkten och origo som representerar talet. Vi kan se denna som en **visare** med längden |*z*| och en riktning som definieras av vinkeln α.

Räkneregler

Komplexa tal kan behandlas algebraiskt, varvid följande regler gäller.

Addition



$$z = z_1 + z_2 = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{j}(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2))$$
$$z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \qquad z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$$
$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}(b_1 + b_2) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}(z)$$

Figuren visar vad additionen innebär i det komplexatalplanet. Visaren för z blir lika med den geometriska summan av visarna för z_1 och z_2. För $|z|$ och $\arg(z)$ gäller de tidigare angivna generella uttrycken.

Subraktion

$$z = z_1 - z_2 = \mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{j}\left(\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right)$$

I talplanet blir visaren för z lika med den geometriska skillnaden mellan visarna för z_1 och z_2.

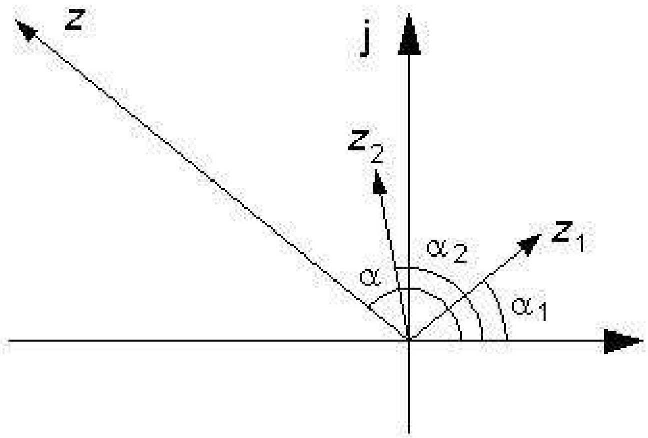
Multiplikation

Multiplikationsregeln demonstrerar vi enklast med ett exempel.

$$z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \qquad z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2 \qquad (\mathrm{j})^2 = -1$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 + \mathrm{j}b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{j}(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Multiplikationen kan också genomföras med talen uttryckta i polär form.



$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 \\ &= |z_1|\left(\cos(\alpha_1) + \mathrm{j}\sin(\alpha_1)\right) \cdot |z_2|\left(\cos(\alpha_2) + \mathrm{j}\sin(\alpha_2)\right) \\ &= |z_1| \cdot |z_1|\left(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{j}\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\right) \end{aligned}$$

Detta innebär att

$$|z| = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Division

Algebraiskt genomförs divisionen så här:

$$z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \qquad z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \mathrm{j}b_1}{a_2 + \mathrm{j}b_2}$$

Nu vill man ofta ha resultatet i formen a+jb och i så fall förlänger man med nämnarens konjugatkvantitet a_2 - jb_2. Då får man

$$z = \frac{(a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 - \mathrm{j}b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{j}\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Uttrycks talen i polär form kommer divisionsregeln att se ut så här:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \mathrm{j}\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right)$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Några minnesregler

1. Om $z = z_1 + z_2$, så är i allmänhet $|z| \neq |z_1| + |z_2|$
   (endast om $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ är $|z| = |z_1| + |z_2|$)

2. När man skall bilda beloppet av en produkt eller en kvot mellan två komplexa tal z_1 och z_2 är det i allmänhet onödigt att först ta fram det komplexa resultatet och sedan bilda beloppet av detta. Man beräknar istället $|z_1|$ och $|z_2|$ var för sig, ty som vi sett gäller

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Exempel

Exempel 1

Gör om uttrycket 2 + 3/j till formen a+jb.

$$2+\frac{3}{\mathrm{j}}=2+\frac{3\cdot\mathrm{j}}{\mathrm{j}\cdot\mathrm{j}}=2+\frac{3\cdot\mathrm{j}}{-1}=2-3\mathrm{j}$$

Exempel 2

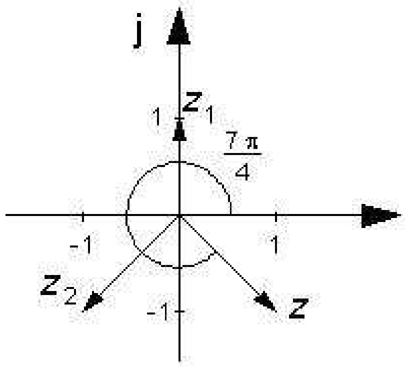
Skriv uttrycket $z = 6 + \mathrm{j}A + 1/(\mathrm{j}B)$ i allmän form för komplexa tal, samt teckna beloppet av uttrycket.

$$z=6+\mathrm{j}A-\frac{\mathrm{j}}{B}=6+\mathrm{j}\left(A-\frac{1}{B}\right)$$

$$|z|=\left|6+\mathrm{j}\left(A-\frac{1}{B}\right)\right|=\sqrt{36+\left(A-\frac{1}{B}\right)^2}$$

Exempel 3

Bestäm $|z|$ och arg(z) om $z = z_1 \cdot z_2$ och $z_1 = \mathrm{j}$ och $z_2 = -1 -\mathrm{j}$



Algebraiskt

$$z = z_1 \cdot z_2 = \mathrm{j} \cdot (\text{-}1 \text{-} \mathrm{j}) = \text{-}\mathrm{j} \text{-} \mathrm{j}^2 = 1 - \mathrm{j}$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \alpha = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) =$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$$

Polärt

$$|z_1| = 1 \qquad |z_2| = \sqrt{2}$$

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = 1 \cdot \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$|z| = \sqrt{2} \qquad \arg(z) = \frac{7\pi}{4}$$

Exempel 4

$z_1 = 3 + \mathrm{j}5$, $z_2 = 5 + \mathrm{j}7$. Beräkna

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|3 + \mathrm{j}5|}{|5 + \mathrm{j}7|} = \frac{\sqrt{3^2 + 5^2}}{\sqrt{5^2 + 7^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{9 + 25}}{\sqrt{25 + 49}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{74}} = \sqrt{\frac{34}{74}} = 0{,}68$$

Om man istället hade multiplicerat med konjugatkvantiteten hade man fått

$$z = \frac{3+j5}{5+j7} = \frac{(3+j5)(5-j7)}{(5+j7)(5-j7)} = \frac{15-j21+j25-j^2 35}{25-j^2 49}$$

$$= \frac{50+j4}{74} \qquad j^2 = -1$$

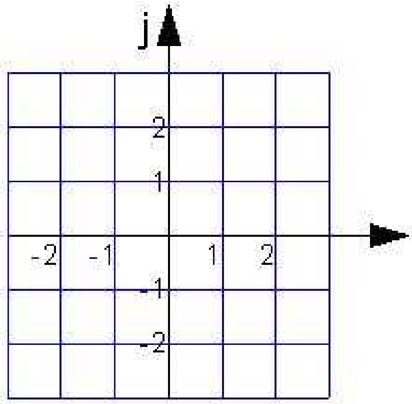
$$|z| = \frac{|50+j4|}{|74|} = \frac{\sqrt{50^2+4^2}}{74} = \frac{\sqrt{2516}}{74} = 0{,}68$$

Om man jämför med ovanstående ser man att komplexkonjugeringen medför mycket mera arbete!

Övningsuppgifter

Fråga 1

Åt vilket håll pekar visaren z = -2 + j2 ?



Fråga 2

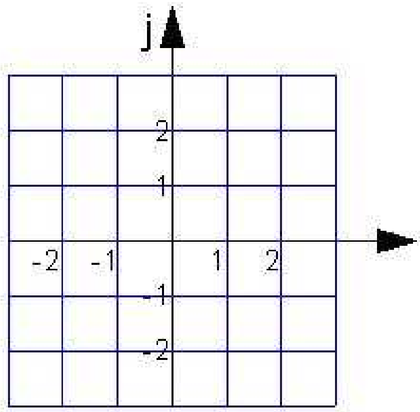
Vad är summan av z_1 och z_2 om z_1 = 1 + j2 och z_2 = 2 - j ?

Fråga 3

Hur lång är visaren 3 + j4 ?

Fråga 4

Rita visaren $z = z_1 - z_2$ om z_1 = 1 + j och z_2 = 2 + j ?



Fråga 5

Hur stor blir Im(z) om $z = z_1 + z_2$?
$z_1 = 3(1+j)$ och $z_2 = 2(1-j)$.

Fråga 6

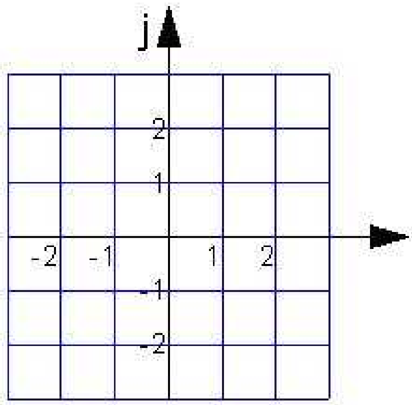
Hur stor blir $|z|$ om $z = z_1 \cdot z_2$?
$z_1 = 2 + j$ och $z_2 = -(2 + j)$.

Fråga 7

Vad blir $|3+j4| \cdot |j2|$?

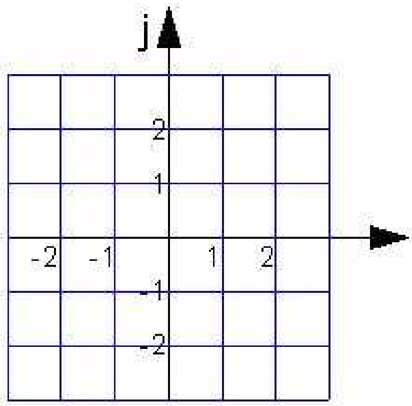
Fråga 8

Bestäm $|z|$ och arg(z) om $z = z_1 \cdot z_2$ och $z_1 = 1 + j$ och $z_2 = -1 + j$.



Fråga 9

Vad blir $z = z_1 \cdot z_2$ om $z_1 = j$ och $z_2 = 1 - j$.



Fråga 10

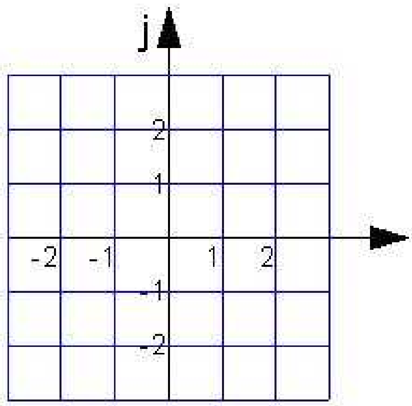
Vad är $|z|$?

$$z = \frac{\dfrac{2}{j3}}{2 + \dfrac{1}{j3}}$$

Fråga 11

Beräkna z.
$z_1 = 2 + j3$ och $z_2 = 1 + j$.

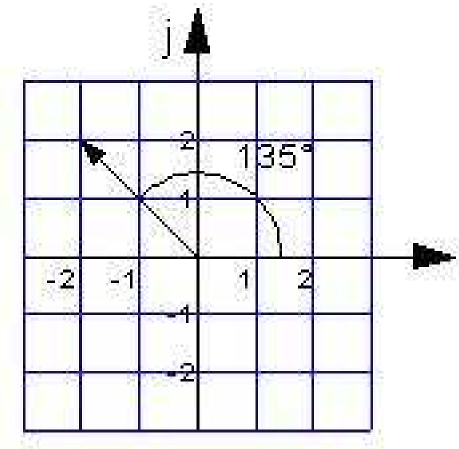
$$z = \frac{z_1}{z_2}$$



Repetition, komplexa tal

Svar och lösningar

Fråga 1



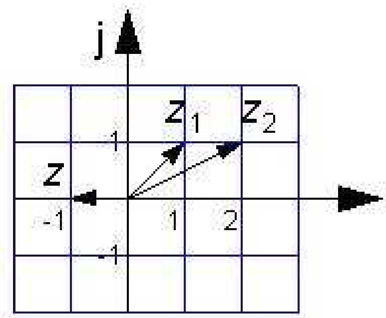
Fråga 2

$z = z_1 + z_2 = 1 + j2 + 2 - j = 3 + j$.

Fråga 3

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Fråga 4



Fråga 5

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) = 3 + (-2) = 1$$

Fråga 6

$$|z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad |z_2| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$|z| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$$

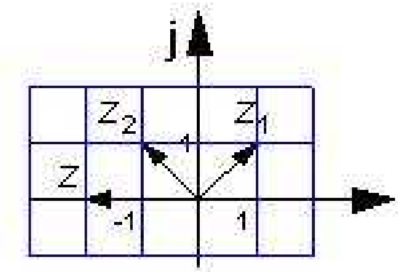
Fråga 7

$$\sqrt{9+16} \cdot 2 = 10 \quad \text{eller} \quad |j6-8| = \sqrt{36+64} = 10$$

Fråga 8

$$z = z_1 \cdot z_2 = (1+j)(-1+j) = -1+j-j+j^2 = -2$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{0}{-2}\right) + \pi = \pi$$



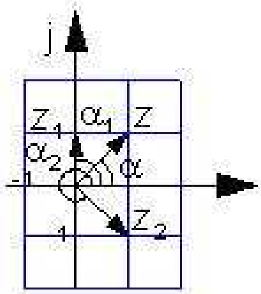
Fråga 9

$$z = z_1 \cdot z_2 = j(1-j) = j - j^2 = 1+j$$

eller

$$z_1 = 1\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + j\sin\tfrac{\pi}{2}\right) \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7\pi}{4} + j\sin\tfrac{7\pi}{4}\right)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + j\sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$



Fråga 10

$$z = \frac{\frac{2}{j3}}{2 + \frac{1}{j3}} \cdot \frac{j3}{j3} = \frac{2}{j6 + 1}$$

$$|z| = \frac{|2|}{|j6 + 1|} = \frac{2}{\sqrt{36 + 1}} = 0{,}329$$

Fråga 11

Algebraiskt

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + j3}{1 + j} = \frac{(2 + j3)}{(1 + j)} \cdot \frac{(1 - j)}{(1 - j)} =$$

$$= \frac{2 + j - 3\,j^2}{1 + 1} = \frac{5 + j}{2} = 2{,}5 + 0{,}5\,j$$

Polärt

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$z = |z| \cdot \left(\cos(\arg(z)) + j \cdot \sin(\arg(z)) \right)$$