Institutionen för matematik

SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Lösningsförslag till modelltentamen

Del A

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 + y$ och området D som ges av olikheterna

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \qquad \text{och} \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$$

(a) Förklara varför man i förväg kan veta att funktionen f antar ett största och ett minsta värde på området D. **(1 p)**

(b) Bestäm det största och det minsta värdet som f antar på D. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Funktionen är ett polynom och därmed kontinuerlig. Området är både slutet och begränsat, dvs kompakt. Därmed måste funktionen anta ett största och ett minsta värde i området enligt sats i boken.

(b) Maximum och minimum kan antingen antas i stationära punkter i det inre av området, eller på randen. Stationära punkter ges av nollställen hos gradienten och vi får att $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 1)$ som aldrig är noll. Det finns därmed inga stationära punkter. Det återstår att kontrollera randen. Den består av två enhetsintervall längs koordinataxlarna och en kvartscirkel. På x-axeln har vi $f(x,0) = x^2$ som varierar från 0 till 1 på intevallet $0 \leq x \leq 1$. Längs y-axeln har vi $f(0,y) = y$ som också varierar mellan 0 och 1 på intervallet $0 \leq y \leq 1$. Längs kvartscirkeln kan vi använda parametriseringen $(x,y) = (\cos t, \sin t)$ och får då

$$f(x,y) = \cos^2 t + \sin t = 1 - \sin^2 t + \sin t = 1 - \left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Eftersom $\sin t$ varierar mellan 0 och 1 får vi det största värdet på cirkelbågen som $5/4$ och det minsta som $1 = 5/4 - 1/4$. När vi jämför de olika kandidaterna till största och minsta värde på D ser vi att $5/4$ är störst och 0 minst.

Svar.

(a) Enligt sats ur boken antar kontinuerliga funktioner maximum och minimum på kompakta områden.

(b) Det största värdet är $5/4$ och det minsta värdet är 0.

2. Använd en linjarisering kring punkten $(x_0\,, y_0) = (1\,, 2)$ för att approximera värdet av funktionen $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ i punkten $(1{,}2\,,\ 2{,}1)$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Linjariseringen av funktionen ges av gradienten. Vi har att

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + (x - x_0, y - y_0) \cdot \operatorname{grad} f(x_0,y_0).$$

Vi beräknar först gradienten som

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \left(\frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}}, \frac{4y_0}{2\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}} \right) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}}, \frac{2y_0}{\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}} \right)$$

vilket i punkten $(x_0, y_0) = (1\,, 2)$ ger

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+8}}, \frac{4}{\sqrt{1+8}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{9}}, \frac{4}{\sqrt{9}} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

Därmed har vi enligt linjarinseringen att

$$f(1{,}2\,,\ 2{,}1) \approx f(1\,,2) + (0{,}2\,, 0{,}1) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) = 3 + \frac{0{,}6}{3} = 3{,}2$$

Svar. Linjariseringen ger att $f(1{,}2\,,\ 2{,}1) \approx 3{,}2$.

3. Beräkna integralen
$$\iint_T 2xy\,dxdy$$
där T är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,1)$ och $(0,3)$, exempelvis genom att utföra variabelbytet $x = 2u$ och $y = u + 3v$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Om vi väljer att genomföra koordinatbytet kommer triageln att avbildas på en triangel och hörnen i den nya triangeln ges av $(u,v) = (0,0)$, $(u,v) = (1,0)$ och $(u,v) = (0,1)$. Jacobianen vid koordinatbytet ges av
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$
Integranden ersätts med $2xy = 2(2u)(u+3v) = 4u^2+12uv$ och vi kan beräkna integralen genom upprepad integration.
$$\begin{aligned}
\iint_T 2xy\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^{1-v} (4u^2 + 12uv)\cdot 6\,dudv \\
&= \int_0^1 \left[\frac{4}{3}u^3 + 6u^2v\right]_0^{1-v} \cdot 6\,dv \\
&= \int_0^1 8(1-v)^3 + 36(1-v)^2 v\,dv \\
&= \left[-2(1-v)^4 + 36\cdot\frac{v^2}{2} - 72\cdot\frac{v^3}{3} + 36\frac{v^4}{4}\right]_0^1 \\
&= 2 + 18 - 24 + 9 = 5.
\end{aligned}$$

Svar. $\iint_T 2xy\,dxdy = 5$

DEL B

4. Vektorfältet $\mathbf{F}(x,y)$ är definierat i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dvs i xy-planet förutom origo, genom

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Beräkna $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ_1 är enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ orienterad moturs. **(2 p)**

(b) Beräkna $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ_2 är cirkeln $(x-3)^2+y^2=1$ orienterad moturs. **(1 p)**

(c) Förklara hur vi kan veta att $\mathbf{F}(x,y)$ inte är konservativt. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi parametriserar cirkeln γ_1 genom $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$. Därmed har vi att $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt = (-\sin t, \cos t)\,dt$ och

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

(b) Cirkeln γ_2 innesluter inte origo, den enda punkt där $\mathbf{F}$ inte är definerat och kontinuerligt deriverbart. Därmed kan vi använda Greens formel och med

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

har vi att

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

Därmed är

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

där C är området som innesluts av γ_2.

(c) Om $\mathbf{F}$ skulle varit konservativt skulle båda integralerna ha varit noll eftersom integralen av ett konservativt fät är noll över varje sluten kurva.

Svar.

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$

(b) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$

(c) Om $\mathbf{F}$ hade varit konservativt hade båda integralerna varit noll.

5. Ekvationen
$$ax^2 + b\cos(x) = c$$
har då $a = 3$, $b = -2$ och $c = 1$ en rot nära $x = 0{,}9$.

(a) Skriv ett Matlabprogram som bestämmer roten med minst 6 decimalers noggrannhet. **(2 p)**

(b) Antag nu att a, b och c har en osäkerhet på $\pm 1\%$, $\pm 2\%$ respektive $\pm 3\%$. Skriv ett Matlabprogram som skattar roten så bra det går utifrån denna osäkerhet. Vilken osäkerheten i roten ger osäkerheten i parametrarna upphov till? **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) En effektiv metod är Newton-Raphsons metod. Vi använder startvärdet $x = 0{,}9$ och tittar att korrektionerna (t-värdena) avtar snabbt. För 6 decimaler krävs $|t| < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$, men med tumregeln tar till en säkerhetsfaktor på cirka två tiopotenser.

```
%-------------------------------------------------------
a = 3; b = -2; c = 1; x = 0.9;
t = 1;
while abs(t)>1e-8;
 f = a*x^2 + b*cos(x) - c;
 d = 2*a*x - b*sin(x);
 t = f / d;
 x = x - t;
end;
svar = x
%-------------------------------------------------------
```

(b) Vi använder störningsräkning. Beräkna först roten med ostörda värden, sedan den rot man får med varje parameter störd maximalt, en i taget. Sätt felgränsen som summan av beloppet av störningarna. Notera att relativa felet fås som absoluta felet delat med storheten själv.
För enkel programmering lägger vi ekvationslösningen från del (a) i en funktion:

```
%- fkn.m -----------------------------------------------
function x = fkn(a,b,c);
x = 0.9;
t = 1;
while abs(t)>1e-8;
 f = a*x^2 + b*cos(x) - c;
 d = 2*a*x - b*sin(x);
 t = f / d;
 x = x - t;
end;
%-------------------------------------------------------
```

Med huvudprogrammet

```
%-----------------------------------------------------------
a = 3; b = -2; c = 1; x = 0.9;
ra = 0.01; rb = 0.02; rc = 0.03;
xo = fkn(a,b,c);          % Ostörda värdena
xa = fkn(a*(1+ra),b,c);   % Stör varje parameter maximalt
xb = fkn(a,b*(1+rb),c);
xc = fkn(a,b,c*(1+rc));
rot = xo
felg = abs(xa-xo) + abs(xb-xo) + abs(xc-xo)
rel = felg/rot
%-----------------------------------------------------------
```

får vi den önskade utskriften

```
rot = 0.87280
felg = 0.011551
rel = 0.013234
```

6. Arean av en buktig yta kan beräknas genom formeln

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| \, dsdt$$

där $\mathbf{r}(s,t)$ är en parametrisering av ytan över området D i st-planet.

Vi ska se på ytan som ges av den del av enhetsfären $x^2+y^2+z^2=1$ som ligger ovanför planet $z=1/2$.

(a) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder sfäriska koordinater, dvs $(x,y,z)=(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, för att beräkna ytans area. **(1 p)**

(b) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder cylindriska koordinater, dvs $(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2})$, för att beräkna ytans area. **(1 p)**

(c) Beräkna ytans area genom att beräkna någon av de två dubbelintegralerna från deluppgift (a) och (b). **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi beräknar först de två derivatorna med avseende på parametrarna

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)\,.$$

Därmed kan vi beräkna kryssprodukten

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (\cos\varphi\sin\theta \cdot 0 - (-\sin\varphi)\sin\varphi\cos\theta, \\ &\quad -\sin\varphi(-\sin\varphi\sin\theta) - \cos\varphi\cos\theta \cdot 0, \\ &\quad \cos\varphi\cos\theta\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta(-\sin\varphi\sin\theta)) \\ &= (\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)) \\ &= (\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\varphi).\end{aligned}$$

Längden av detta ges nu av

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| &= \sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\varphi} \\ &= \sqrt{\sin^4\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi} = \sqrt{\sin^2\varphi} = |\sin\varphi|.\end{aligned}$$

Vi behöver också ta reda på gränserna. Planet $z=1/2$ möter sfären i de punkter där $x^2+y^2=3/4$, vilket motsvarar $\varphi=\pi/3$. Alltså behöver vi beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin\varphi \, d\varphi d\theta.$$

(b) I den andra parametriseringen får vi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \left(\cos\theta, \sin\theta, -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right).$$

Kryssprodukten blir nu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \left(r\cos\theta \cdot \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} - 0\cdot\sin\theta, 0\cdot\cos\theta - \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}, -r\sin^2\theta - r\cos^2\theta\right) \\ &= \left(-\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, -\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}, -r\right)\end{aligned}$$

Längden av kryssprodukten blir

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right| = \sqrt{\frac{r^4\cos^2\theta}{1-r^2} + \frac{r^4\sin^2\theta}{1-r^2} + r^2} = \sqrt{\frac{r^4 + r^2(1-r^2)}{1-r^2}} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Integrationsgränserna ges den här gången av $0 \le \theta \le 2\pi$ och $0 \le r \le \sqrt{3}/2$. Integralen som ska beräknas är därmed

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr d\theta.$$

(c) I det första fallet ska vi beräkna

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin\varphi\, d\varphi d\theta = 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/3} = 2\pi(-1/2-(-1)) = \pi$$

och i det andra fallet ska vi beräkna

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = 2\pi\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = 2\pi(-1/2-(-1)) = \pi.$$

Svar.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin\varphi\, d\varphi d\theta$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr$

(c) Ytans area är π areaenheter.

DEL C

7. Betrakta ekvationen
$$x^y + y^{2x} = 2$$
i området $x, y > 0$.
   (a) Visa att denna ekvation i en omgivning av punkten $(x, y) = (1, 1)$ definierar y som en funktion av x, alltså $y = f(x)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm derivatan $f'(1)$, där f är funktionen från deluppgift (a). **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Enligt implicita funktionssatsen räcker det att kontrollera att den partiella derivatan av vänsterledet med avseende på y inte är noll i punkten i fråga i och med att vänsterledet har kontinuerliga partialderivator.
Med $g(x, y) = x^y + y^{2x}$ får vi att
$$\frac{\partial g}{\partial y} = (\ln|x|)x^y + 2x \cdot y^{2x-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = (\ln|1|)1^1 + 2 \cdot 1 \cdot 1^1 = 2ne0.$$

(b) Vi kan använda implicit derivering för att eberäkna derivatan av $f(x)$. Derivatan av ekvationen med avseende på x blir
$$yx^{y-1} + (\ln|x|)x^y f'(x) + 2(\ln|y|)y^{2x} + 2x \cdot y^{2x-1} f'(x) = 0$$
vilket med $(x, y) = (1, 1)$ ger
$$1 + 0 \cdot f'(1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot f'(1) = 0$$
och $f'(1) = -1/2.$.
Vi kan också göra detta genom att se att derivatan av $h(x) = g(x, f(x))$ ges av
$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} f'(x)$$
och eftersom $h(x) = 2$ får vi $h'(x) = 0$ och $f'(x) = -\frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y}$. Vi har redan räknat ut $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$ och räknar ut den andra partialderivatan som
$$\frac{\partial g}{\partial x} = yx^{y-1} + 2(\ln|y|)y^{2x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 1 \cdot 1^{1-1} + 2(\ln|1|)1^{2\cdot 1} = 1.$$
Därmed fås på nytt $f'(1) = -1/2$.

Svar.

(a) Enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen y som en funktion av x nära $(x, y) = (1, 1)$.

(b) Derivatan är $f'(1) = -1/2$.

8. (a) Skriv en funktion i Matlab som beräknar dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ över det rektangulära området $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ med hjälp av trapetsregeln för dubbelintegraler med M delar i x-led och N delar i y-led. Funktionen ska anropas med kommandot `dubbelIntegral(F,a,b,c,d,M,N)` **(2 p)**

   (b) Om både M och N fördubblas, med ungefär vilken faktor förväntas trunkeringsfelet, beräkningsfelet, respektive tabellfelet ändras? **(1 p)**

   (c) Använd funktionen `dubbelIntegral` från del (a) för att skriva ett Matlab-program som beräknar integralen

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

där rektangeln D ges av $0 \le x \le 2$ och $1 \le y \le 2$ med minst 6 decimalers noggrannhet. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Trapetsregeln i två dimensioner över ett rektangulärt område innebär att man gör trapetsregeln i en dimension i taget.
Programmet nedan integrerar först i x-led, vilket resulterar i ett värde för varje y-värde. Sedan görs trapetsregeln på alla $F(y)$-värdena.

```
%---dubbelIntegral.m2-------------------------------------
function inte=dubbelIntegral(fkn,a,b,c,d,M,N);
dx=(b-a)/M;
dy=(d-c)/N;
x=a+[0:M]*dx;
y=c+[0:N]*dy;
% Gör trapetsregeln i x-led, en för varje varde på y.
F=0;                      % Blivande funktionsvärden i y-led.
for j = 1:(N+1);
  f=feval(fkn,x,y(j));% Beräkna alla funktionsvärden
                      % i en rad, dvs fixt y.
  F(j)=dx*(sum(f)-(f(1)+f(end))/2); % Trapetsregeln
end;
% Gör nu trapetsregeln i y-led:
inte = dy*(sum(F) - (F(1) + F(end))/2);
end
%---------------------------------------------------------
```

(b) En dubblering av M och N innebär en halvering av steget, h. Vanliga trapetsregeln, $T(h)$, sägs ha trunkeringsfel som beror av bara jämna potenser av h, dvs $E \approx c_1h^2 + c_2h^4+c_3h^6+\ldots$. En halvering av steget innebär då en faktor $1/4$ hos trunkeringsfelet, vilket även gäller i flera dimensioner.
Beräkningsfelet blir 4 gånger så stort eftersom antalet punkter är $(M+1)\cdot(N+1) \approx MN$.

Tabellfelet ändras inte i och med att indata inte påverkas av en dubblering av M och N.

(c) Felet skattas som vanligt genom att man jämför två beräkningar med halverad steglängd. Lägg satserna i uppgift (a) i en funktionsfil och anropa med successivt halverad steglängd.
Vi behöver först definiera funktionen som ska integreras:

```
%- fkn.m ----------------------------------------------------
function fint=fkn(x,y);
fint=exp(-x.^2-y.^2);
%-----------------------------------------------------------
```

Sedan kan vi skriva själva programmet:

```
%-----------------------------------------------------------
a = 0; b = 1; c = 0; d = 1;
N = 4; M = N;
inte(1) = dubbelint(fkn,a,b,c,d,M,N);
N = 2*N; M = 2*M; inte(2) = dubbelint(fkn,a,b,c,d,M,N);
iter = 2;
while abs(inte(iter)-inte(iter-1))>1e-8;
  iter = iter + 1;
  N = 2*N; M = 2*M;
  inte(iter) = dubbelint(fkn,a,b,c,d,M,N);
end;
svar = inte(end)
%-----------------------------------------------------------
```

9. Låt Ω vara området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ och $x^2 + y^2 \geq a^2$, och låt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz, -xz + y, z - e^x \sin y).$$

Beräkna flödet av vektorfältet **F** ut från Ω. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan använda divergenssatsen för att beräkna flödet ut från Ω. Divergensen av **F** ges av

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Därmed ges flödet ut ur området Ω av

$$\iiint_\Omega 3\, dxdydz.$$

För att beräkna denna trippelintegral kan vi använda cylinderkoordinater och får $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Integrationsgränserna ges av

$$a \leq r \leq 2a \quad \text{och} \quad -\sqrt{4a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}.$$

Vi integrerar först i z-led och får då

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega 3\, dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_a^{2a} \int_{-\sqrt{4a^2-r^2}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} 3r\, dzdrd\theta = 2\pi \int_a^{2a} 6r\sqrt{4a^2 - r^2}\, dr \\ &= 2\pi \left[-3 \cdot \frac{2}{3}(4a^2 - r^2)^{3/2}\right]_a^{2a} = 2\pi \left(-2 \cdot 0 + 2 \cdot (3a^2)^{3/2}\right) = 12\pi|a|^3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Svar. Flödet av **F** ut ur ω är $6|a|^3\sqrt{3}$.