



SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Lösningsförslag till modelltentamen

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = x^2 + y$ och området D som ges av olikheterna

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

- (a) Förklara varför man i förväg kan veta att funktionen f antar ett största och ett minsta värde på området D . **(1 p)**
- (b) Bestäm det största och det minsta värdet som f antar på D . **(3 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Funktionen är ett polynom och därmed kontinuerlig. Området är både slutet och begränsat, dvs kompakt. Därmed måste funktionen anta ett största och ett minsta värde i området enligt sats i boken.
- (b) Maximum och minimum kan antingen antas i stationära punkter i det inre av området, eller på randen. Stationära punkter ges av nollställena hos gradienten och vi får att grad $f(x, y) = (2x, 1)$ som aldrig är noll. Det finns därmed inga stationära punkter. Det återstår att kontrollera randen. Den består av två enhetsintervall längs koordinataxlarna och en kvartscirkel. På x -axeln har vi $f(x, 0) = x^2$ som varierar från 0 till 1 på intervallet $0 \leq x \leq 1$. Längs y -axeln har vi $f(0, y) = y$ som också varierar mellan 0 och 1 på intervallet $0 \leq y \leq 1$. Längs kvartscirkeln kan vi använda parametriseringen $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ och får då

$$f(x, y) = \cos^2 t + \sin t = 1 - \sin^2 t + \sin t = 1 - \left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Eftersom $\sin t$ varierar mellan 0 och 1 får vi det största värdet på cirkelbågen som $5/4$ och det minsta som $1 = 5/4 - 1/4$. När vi jämför de olika kandidaterna till största och minsta värde på D ser vi att $5/4$ är störst och 0 minst.

Svar.

- (a) Enligt sats ur boken antar kontinuerliga funktioner maximum och minimum på kompakta områden.
- (b) Det största värdet är $5/4$ och det minsta värdet är 0.

2. Använd en linjarisering kring punkten $(x_0, y_0) = (1, 2)$ för att approximera värdet av funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ i punkten $(1, 2, 2, 1)$. **(4 p)**

Lösningförslag. Linjariseringen av funktionen ges av gradienten. Vi har att

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0, y - y_0) \cdot \text{grad } f(x_0, y_0).$$

Vi beräknar först gradienten som

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(\frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}}, \frac{4y_0}{2\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}} \right) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}}, \frac{2y_0}{\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}} \right)$$

vilket i punkten $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ger

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+8}}, \frac{4}{\sqrt{1+8}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{9}}, \frac{4}{\sqrt{9}} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

Därmed har vi enligt linjariseringen att

$$f(1, 2, 2, 1) \approx f(1, 2) + (0, 2, 0, 1) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) = 3 + \frac{0,6}{3} = 3,2$$

Svar. Linjariseringen ger att $f(1, 2, 2, 1) \approx 3,2$.

3. Beräkna integralen

$$\iint_T 2xy \, dx dy$$

där T är triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(2, 1)$ och $(0, 3)$, exempelvis genom att utföra variabelbytet $x = 2u$ och $y = u + 3v$. **(4 p)**

Lösningförslag. Om vi väljer att genomföra koordinatbytet kommer triangeln att avbildas på en triangel och hörnen i den nya triangeln ges av $(u, v) = (0, 0)$, $(u, v) = (1, 0)$ och $(u, v) = (0, 1)$. Jacobianen vid koordinatbytet ges av

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Integranden ersätts med $2xy = 2(2u)(u + 3v) = 4u^2 + 12uv$ och vi kan beräkna integralen genom upprepad integration.

$$\begin{aligned} \iint_T 2xy \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-v} (4u^2 + 12uv) \cdot 6 \, dudv \\ &= \int_0^1 \left[\frac{4}{3}u^3 + 6u^2v \right]_0^{1-v} \cdot 6 \, dv \\ &= \int_0^1 8(1-v)^3 + 36(1-v)^2v \, dv \\ &= \left[-2(1-v)^4 + 36 \cdot \frac{v^2}{2} - 72 \cdot \frac{v^3}{3} + 36 \frac{v^4}{4} \right]_0^1 \\ &= 2 + 18 - 24 + 9 = 5. \end{aligned}$$

Svar. $\iint_T 2xy \, dx dy = 5$

DEL B

4. Vektorfältet $\mathbf{F}(x, y)$ är definierat i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dvs i xy -planet förutom origo, genom

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

- (a) Beräkna $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ_1 är enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ orienterad moturs. **(2 p)**
 (b) Beräkna $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ_2 är cirkeln $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ orienterad moturs. **(1 p)**
 (c) Förklara hur vi kan veta att $\mathbf{F}(x, y)$ inte är konservativt. **(1 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Vi parametriserar cirkeln γ_1 genom $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$. Därmed har vi att $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = (-\sin t, \cos t) dt$ och

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

- (b) Cirkeln γ_2 innesluter inte origo, den enda punkt där \mathbf{F} inte är definierat och kontinuerligt deriverbart. Därmed kan vi använda Greens formel och med

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

har vi att

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \left(-\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Därmed är

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} P dx + Q dy = \iint_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

där C är området som innesluts av γ_2 .

- (c) Om \mathbf{F} skulle varit konservativt skulle båda integralerna ha varit noll eftersom integralen av ett konservativt fält är noll över varje sluten kurva.

Svar.

(a) $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$

(b) $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$

- (c) Om \mathbf{F} hade varit konservativt hade båda integralerna varit noll.

5. Ekvationen

$$ax^2 + b \cos(x) = c$$

har då $a = 3$, $b = -2$ och $c = 1$ en rot nära $x = 0,9$.

- (a) Skriv ett Matlabprogram som bestämmer roten med minst 6 decimalers noggrannhet. **(2 p)**
- (b) Antag nu att a , b och c har en osäkerhet på $\pm 1\%$, $\pm 2\%$ respektive $\pm 3\%$. Skriv ett Matlabprogram som skattar roten så bra det går utifrån denna osäkerhet. Vilken osäkerheten i roten ger osäkerheten i parametrarna upphov till? **(2 p)**

Lösningförslag.

- (a) En effektiv metod är Newton-Raphsons metod. Vi använder startvärdet $x = 0,9$ och tittar att korrektionerna (t -värdena) avtar snabbt. För 6 decimaler krävs $|t| < 0,5 \cdot 10^{-6}$, men med tumregeln tar till en säkerhetsfaktor på cirka två tiopotenser.

```
%-----
a = 3; b = -2; c = 1; x = 0.9;
t = 1;
while abs(t) > 1e-8;
    f = a*x^2 + b*cos(x) - c;
    d = 2*a*x - b*sin(x);
    t = f / d;
    x = x - t;
end;
svar = x
%-----
```

- (b) Vi använder störningsräkning. Beräkna först roten med ostörda värden, sedan den rot man får med varje parameter störd maximalt, en i taget. Sätt felgränsen som summan av beloppet av störningarna. Notera att relativa felet fås som absoluta felet delat med storheten själv.

För enkel programmering lägger vi ekvationslösningen från del (a) i en funktion:

```
%- fkn.m -----
function x = fkn(a,b,c);
x = 0.9;
t = 1;
while abs(t) > 1e-8;
    f = a*x^2 + b*cos(x) - c;
    d = 2*a*x - b*sin(x);
    t = f / d;
    x = x - t;
end;
%-----
```

Med huvudprogrammet

```
%-----  
a = 3; b = -2; c = 1; x = 0.9;  
ra = 0.01; rb = 0.02; rc = 0.03;  
xo = fkn(a,b,c);           % Ostörda värdena  
xa = fkn(a*(1+ra),b,c);   % Stör varje parameter maximalt  
xb = fkn(a,b*(1+rb),c);  
xc = fkn(a,b,c*(1+rc));  
rot = xo  
felg = abs(xa-xo) + abs(xb-xo) + abs(xc-xo)  
rel = felg/rot  
%-----
```

får vi den önskade utskriften

```
rot = 0.87280  
felg = 0.011551  
rel = 0.013234
```

6. Arealen av en buktig yta kan beräknas genom formeln

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt$$

där $\mathbf{r}(s, t)$ är en parametrisering av ytan över området D i st -planet.

Vi ska se på ytan som ges av den del av enhetsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ som ligger ovanför planet $z = 1/2$.

(a) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder sfäriska koordinater, dvs $(x, y, z) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$, för att beräkna ytans area.

(1 p)

(b) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder cylindriska koordinater, dvs $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1 - r^2})$, för att beräkna ytans area.

(1 p)

(c) Beräkna ytans area genom att beräkna någon av de två dubbelintegralerna från deluppgift (a) och (b).

(2 p)

Lösningförslag.

(a) Vi beräknar först de två derivatorna med avseende på parametrarna

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi)$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-\sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, 0).$$

Därmed kan vi beräkna kryssprodukten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (\cos \varphi \sin \theta \cdot 0 - (-\sin \varphi) \sin \varphi \cos \theta, \\ &\quad -\sin \varphi(-\sin \varphi \sin \theta) - \cos \varphi \cos \theta \cdot 0, \\ &\quad \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta(-\sin \varphi \sin \theta)) \\ &= (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \varphi(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) \\ &= (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \varphi). \end{aligned}$$

Längden av detta ges nu av

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| &= \sqrt{\sin^4 \varphi \cos^2 \theta + \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \\ &= \sqrt{\sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \sqrt{\sin^2 \varphi} = |\sin \varphi|. \end{aligned}$$

Vi behöver också ta reda på gränserna. Planet $z = 1/2$ möter sfären i de punkter där $x^2 + y^2 = 3/4$, vilket motsvarar $\varphi = \pi/3$. Alltså behöver vi beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

(b) I den andra parametriseringen får vi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \left(\cos \theta, \sin \theta, -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \right).$$

Kryssprodukten blir nu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \left(r \cos \theta \cdot \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} - 0 \cdot \sin \theta, 0 \cdot \cos \theta - \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}, -r \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta \right) \\ &= \left(-\frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}}, -\frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}, -r \right) \end{aligned}$$

Längden av kryssprodukten blir

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = \sqrt{\frac{r^4 \cos^2 \theta}{1-r^2} + \frac{r^4 \sin^2 \theta}{1-r^2} + r^2} = \sqrt{\frac{r^4 + r^2(1-r^2)}{1-r^2}} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Integrationsgränserna ges den här gången av $0 \leq \theta \leq 2\pi$ och $0 \leq r \leq \sqrt{3}/2$.
Integralen som ska beräknas är därmed

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta.$$

(c) I det första fallet ska vi beräkna

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi [-\cos \varphi]_0^{\pi/3} = 2\pi(-1/2 - (-1)) = \pi$$

och i det andra fallet ska vi beräkna

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi [-\sqrt{1-r^2}]_0^{\sqrt{3}/2} = 2\pi(-1/2 - (-1)) = \pi.$$

Svar.

(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$

(c) Ytans area är π areaenheter.

DEL C

7. Betrakta ekvationen

$$x^y + y^{2x} = 2$$

i området $x, y > 0$.

- (a) Visa att denna ekvation i en omgivning av punkten $(x, y) = (1, 1)$ definierar y som en funktion av x , alltså $y = f(x)$. **(2 p)**
- (b) Bestäm derivatan $f'(1)$, där f är funktionen från deluppgift (a). **(2 p)**

Lösningförslag.

- (a) Enligt implicita funktionssatsen räcker det att kontrollera att den partiella derivatan av vänsterledet med avseende på x inte är noll i punkten i fråga i och med att vänsterledet har kontinuerliga partialderivator.

Med $g(x, y) = x^y + y^{2x}$ får vi att

$$\frac{\partial g}{\partial x} = yx^{y-1} + 2(\ln |y|)y^{2x} \implies \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 1 \cdot 1^{1-1} + 2(\ln |1|)1^{2 \cdot 1} = 1 \neq 0.$$

- (b) Vi kan använda implicit derivering för att eberäkna derivatan av $f(x)$. Derivatan av ekvationen med avseende på x blir

$$yx^{y-1} + (\ln |x|)x^y f'(x) + 2(\ln |y|)y^{2x} + 2x \cdot y^{2x-1} f'(x) = 0$$

vilket med $(x, y) = (1, 1)$ ger

$$1 + 0 \cdot f'(1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot f'(1) = 0$$

och $f'(1) = -1/2$.

Vi kan också göra detta genom att se att derivatan av $h(x) = g(x, f(x))$ ges av

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} f'(x)$$

och eftersom $h(x) = 2$ får vi $h'(x) = 0$ och $f'(x) = -\frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y}$. Vi har redan räknat ut $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$ och räknar ut den andra partialderivatan som

$$\frac{\partial g}{\partial y} = (\ln |x|)x^y + 2x \cdot y^{2x-1} \implies \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = (\ln |1|)1^1 + 2 \cdot 1 \cdot 1^1 = 2.$$

Därmed fås på nytt $f'(1) = -1/2$.

Svar.

- (a) Enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen y som en funktion av x nära $(x, y) = (1, 1)$.
- (b) Derivatan är $f'(1) = -1/2$.

8. (a) Skriv en funktion i Matlab som beräknar dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) dx dy$ över det rektangulära området $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ med hjälp av trapetsregeln för dubbelintegraler med M delar i x -led och N delar i y -led. Funktionen ska anropas med kommandot `dubbelIntegral(F, a, b, c, d, M, N)` **(2 p)**
- (b) Om både M och N fördubblas, med ungefär vilken faktor förväntas trunckeringsfelet, beräkningsfelet, respektive tabellfelet ändras? **(1 p)**
- (c) Använd funktionen `dubbelIntegral` från del (a) för att skriva ett Matlab-program som beräknar integralen

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$$

där rektangeln D ges av $0 \leq x \leq 2$ och $1 \leq y \leq 2$ med minst 6 decimalers noggrannhet. **(1 p)**

Lösningförslag.

- (a) Trapetsregeln i två dimensioner över ett rektangulärt område innebär att man gör trapetsregeln i en dimension i taget.

Programmet nedan integrerar först i x -led, vilket resulterar i ett värde för varje y -värde. Sedan görs trapetsregeln på alla $F(y)$ -värdena.

```
%---dubbelIntegral.m2-----
function inte=dubbelIntegral(fkn,a,b,c,d,M,N);
dx=(b-a)/M;
dy=(d-c)/N;
x=a+[0:M]*dx;
y=c+[0:N]*dy;
% Gör trapetsregeln i x-led, en för varje värde på y.
F=0; % Blivande funktionsvärden i y-led.
for j = 1:(N+1);
    f=feval(fkn,x,y(j)); % Beräkna alla funktionsvärden
    % i en rad, dvs fixt y.
    F(j)=dx*(sum(f)-(f(1)+f(end))/2); % Trapetsregeln
end;
% Gör nu trapetsregeln i y-led:
inte = dy*(sum(F) - (F(1) + F(end))/2);
end
%-----
```

- (b) En dubblering av M och N innebär en halvering av steget, h . Vanliga trapetsregeln, $T(h)$, sägs ha trunckeringsfel som beror av bara jämna potenser av h , dvs $E \approx c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots$. En halvering av steget innebär då en faktor $1/4$ hos trunckeringsfelet, vilket även gäller i flera dimensioner.

Beräkningsfelet blir 4 gånger så stort eftersom antalet punkter är $(M+1) \cdot (N+1) \approx MN$.

Tabellfelet ändras inte i och med att indata inte påverkas av en dubbling av M och N .

- (c) Felet skattas som vanligt genom att man jämför två beräkningar med halverad steglängd. Lägg satserna i uppgift (a) i en funktionsfil och anropa med successivt halverad steglängd.

Vi behöver först definiera funktionen som ska integreras:

```
%- fkn.m -----  
function fint=fkn(x,y);  
fint=exp(-x.^2-y.^2);  
%-----
```

Sedan kan vi skriva själva programmet:

```
%-----  
a = 0; b = 1; c = 0; d = 1;  
N = 4; M = N;  
inte(1) = dubbelint(fkn,a,b,c,d,M,N);  
N = 2*N; M = 2*M; inte(2) = dubbelint(fkn,a,b,c,d,M,N);  
iter = 2;  
while abs(inte(iter)-inte(iter-1))>1e-8;  
    iter = iter + 1;  
    N = 2*N; M = 2*M;  
    inte(iter) = dubbelint(fkn,a,b,c,d,M,N);  
end;  
svar = inte(end)  
%-----
```

9. Låt Ω vara området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ och $x^2 + y^2 \geq a^2$, och låt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz, -xz + y, z - e^x \sin y).$$

Beräkna flödet av vektorfältet \mathbf{F} ut från Ω .

(4 p)

Lösningförslag. Vi kan använda divergenssatsen för att beräkna flödet ut från Ω . Divergen-
sen av \mathbf{F} ges av

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Därmed ges flödet ut ur området Ω av

$$\iiint_{\Omega} 3 \, dx \, dy \, dz.$$

För att beräkna denna trippelintegral kan vi använda cylinderkoordinater och får $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$. Integrationsgränserna ges av

$$a \leq r \leq 2a \quad \text{och} \quad -\sqrt{4a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}.$$

Vi integrerar först i z -led och får då

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} 3 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_a^{2a} \int_{-\sqrt{4a^2 - r^2}}^{\sqrt{4a^2 - r^2}} 3r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_a^{2a} 6r \sqrt{4a^2 - r^2} \, dr \\ &= 2\pi \left[-3 \cdot \frac{2}{3} (4a^2 - r^2)^{3/2} \right]_a^{2a} = 2\pi (-2 \cdot 0 + 2 \cdot (3a^2)^{3/2}) = 12\pi |a|^3 \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Svar. Flödet av \mathbf{F} ut ur ω är $6|a|^3 \sqrt{3}$.
